WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I EKONOMETRII
UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI

Joachim Syga

# WIELOWARTOŚCIOWE CAŁKI STOCHASTYCZNE WZGLĘDEM SEMIMARTYNGAŁU I ICH ZASTOSOWANIA W TEORII INKLUZJI STOCHASTYCZNYCH

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dra hab. Jerzego Motyla, prof. UZ

ZIELONA GÓRA 2009

*Autor składa najserdeczniejsze podziękowania Panu Profesorowi Jerzemu Motylowi za pomoc w napisaniu tej rozprawy, w szczególności za wszystkie uwagi, sugestie, krytykę i przede wszystkim za cierpliwość.*

*Rozprawa została napisana przy wsparciu finansowym ze środków*
*Europejskiego Funduszu Społecznego*
*oraz ze środków budżetu Państwa w ramach projektu:*
*"Wsparcie finansowe dla studentów studiów doktoranckich*
*kierunków ścisłych i technicznych Uniwersytetu Zielonogórskiego".*

# Spis treści


**Wstęp** **iii**

**1 Założenia i podstawowe definicje** **1**

**2 Wielowartościowa całka stochastyczna typu Itô** **11**

**3 Wielowartościowa całka stochastyczna typu Stratonowicza** **19**

3.1 Całki stochastyczne typu forward i backward . . . . . . . . . . . . . . 20

3.2 Wielowartościowa całka stochastyczna typu Stratonowicza . . . . . 25

**4 Własności zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznych** **35**

**Bibliografia** **47**

# Wstęp

W 1965 roku R.J. Aumann w pracy [5] zaproponował definicję całki z odwzorowania wielowartościowego $F$, bazując na teorii całki Lebesgue'a. Definicja wprowadzona przez niego określała tę całkę jako zbiór jednowartościowych całek z selektorów odwzorowania $F$. Badaniem jej własności zajmowali się m.in. G. Debreu [11], C. Castaing [8], F.S. De Blasi i A. Lasota [12], R. Datko [10], Z. Artstein [2], A. Fryszkowski [14, 15], M. Kisielewicz [24].

Naturalnym problemem wydaje się więc uogólnienie idei R.J. Aumanna na przypadek wielowartościowych całek stochastycznych. W rozprawie badane są dwa typy wielowartościowych całek stochastycznych. Pierwszy z nich jest rozszerzeniem idei zaproponowanej przez K. Itô w 1944 roku, ([19, 20]), drugi natomiast dotyczy całki stochastycznej wprowadzonej przez R.L. Stratonowicza w 1964 roku, ([36]). Dotychczas rozważano głównie wielowartościowe całki stochastyczne typu Itô względem procesu Wienera (B. Boscan [7], B.D. Gelman i J.S. Gliklikh [16], M. Kisielewicz [22]) i procesu Poissona (M. Kisielewicz [23]). Własności selekcyjne wielowartościowej całki typu Itô względem semimartyngału można znaleźć w pracy J. Motyla, [30]. W pracy M. Michty, [27], rozpatrywano wielowartościowe całki stochastyczne typu Itô z jednowartościowego procesu względem wielowartościowego semimartyngału.

Wielowartościowa całka stochastyczna typu Stratonowicza była dotychczas rozważana w pracach A. Góralczyk, M. Michty i J. Motyla, [17, 28]. Pierwsza z nich dotyczyła całki względem procesu Wienera, natomiast druga całki względem semimartyngału.

Przedmiotem badań zawartych w rozprawie są własności wielowartościowych całek stochastycznych typu Itô i Stratonowicza względem semimartyngału.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów.

W rozdziale pierwszym zawarto podstawowe definicje i własności wykorzystane w dalszej części rozprawy.

W rozdziale drugim omówiona została wielowartościowa całka stochastyczna typu Itô i jej własności oraz własności zbioru selektorów całkowalnych w sensie Itô względem semimartyngału. Stanowią one uogólnienie znanych dotąd twierdzeń dotyczących własności wielowartościowej całki typu Itô względem procesu Wienera i procesu Poissona uzyskanych przez M. Kisielewicza w pracach [22, 23]. Wyniki prezentowane w tym rozdziale dotyczą własności zbioru selektorów całkowalnych względem semimartyngału i ich związku z własnościami całki wielowartościowej. Zasadniczymi rezultatami są twierdzenia o przechodzeniu z funkcją "distans" i odległością Hausdorffa pod znak całki dla rozważanej wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô. Wyniki zamieszczone w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [31].

W rozdziale trzecim badana jest wielowartościowa całka stochastyczna typu Stratonowicza. Jedynymi znanymi mi wynikami dotyczącymi takiej całki są prace [17, 28]. Autorzy rozważali w nich wielowartościowe całki względem procesu Wienera oraz względem semimartyngału. Całka prezentowana w rozprawie jest zdefiniowana w inny sposób niż we wspomnianych wyżej pracach. Do jej definicji wykorzystano ideę konstrukcji całek forward i backward zapropowanych przez F. Russo i P. Vallois w pracach [34, 35] oraz wraz z M. Errami w pracy [13]. Najważniejszym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie aproksymacyjne dla wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza względem semimartyngału. Wyniki przedstawione w tym rozdziale stanowią treść pracy [32].

W rozdziale czwartym zastosowano niektóre z otrzymanych wyników do teorii inkluzji stochastycznych.

Przedmiotem badań omówionych w tym rozdziale jest zbiór rozwiązań inkluzji stochastycznych typu Itô. W prezentowanych twierdzeniach pokazano własności tego zbioru dla inkluzji typu Itô względem semimartyngału. Stanowią one uogólnienie wyników M. Kisielewicza, który w pracy [22] badał własności zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznej typu Itô względem procesu Wienera i Poissona.

W drugiej części tego rozdziału udowodnione zostało twierdzenie selekcyjne dla wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza.

Jest ono stochastycznym odpowiednikiem własności całki Aumanna, znanej jako Lemat o Reprezentacji Całkowej, ([3] Lemat 2.1.1). Twierdzenie selekcyjne tego typu zostało po raz pierwszy udowodnione przez A. Fryszkowskiego w pracy [15], gdzie przedmiotem badań była całka Aumanna z multifunkcji dekomponowalnej. M. Kisielewicz w pracy [23] rozważał podobny problem selekcyjny dla wielowartościowej całki typu Itô względem procesu Wienera i Poissona, a J. Motyl, ([30]), dla całki typu Itô względem semimartyngału.

Twierdzenie to stanowi pierwszy krok w kierunku badań zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznych typu Stratonowicza. Dzięki niemu otrzymujemy równoważność dwóch podejść do definicji mocnych rozwiązań inkluzji stochastycznej typu Stratonowicza.
Tezy zamieszczone w tym rozdziale nie były dotąd publikowane.

# Rozdział 1

# Założenia i podstawowe definicje

W rozdziale tym przedstawione zostaną podstawowe oznaczenia, założenia, definicje i własności wykorzystywane w dalszej części rozprawy.

W całej rozprawie zastosowano następujące oznaczenia:
$f, g, h$ – funkcje oraz procesy jednowartościowe,
$F, G$ – multifunkcje oraz procesy wielowartościowe,
$M$ – jednowymiarowy martyngał,
$Z$ – jednowymiarowy semimartyngał,
$A$ – jednowymiarowy proces o wahaniu ograniczonym.

Normy użyte w rozprawie są oznaczone w zależności od przestrzeni, na której są określone, np.: $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$, itp. Wyjątek stanowi norma, (euklidesowa), w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oznaczana symbolem $|\cdot|$.
Odległość Hausdorffa "$H$" oraz funkcja distans "dist" mają również indeksy zależne od rodzaju przestrzeni, na której są określone: $H_{L^2}, H_{\mathcal{H}^2}, H$ oraz $\text{dist}_{L^2}, \text{dist}_{\mathcal{H}^2}, \text{dist}$ oznaczają funkcje określone odpowiednio na przestrzeni $L^2$, $\mathcal{H}^2$ oraz $\mathbb{R}^n$.

W rozprawie zastosowano numerację obejmującą przedstawione definicje, twierdzenia, lematy oraz uwagi w zależności od kolejności występowania w rozdziałach. Numeracja składa się z dwóch części: **a.b**, gdzie **a** oznacza numer rozdziału, natomiast **b** oznacza kolejny numer definicji, twierdzenia, lematu, bądź uwagi.

Wzory numerowane są w podobny sposób.

Symbolem $I$ będziemy oznaczać przedział domknięty $[0, T]$ w $\mathbb{R}_+$.
Przez $1\!\!1_B$ oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru $B$: $1\!\!1_B(t) = 1$ dla $t \in B$ oraz $1\!\!1_B(t) = 0$ dla $t \notin B$.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ będzie zupełną przestrzenią probabilistyczną, gdzie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ oznacza filtrację spełniającą następujące warunki:
(i) $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory miary $P$-zero z $\sigma$-algebry $\mathcal{F}$,
(ii) dla dowolnych $t \in I$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.

Zmienna losowa $\alpha : \Omega \to [0, T]$ jest $\mathbb{F}$–czasem zatrzymania, jeżeli zdarzenie $\{\alpha \leq t\}$ należy do $\sigma$-algebry $\mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in I$.

Procesem stochastycznym $x = (x_t)_{t \in I}$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest rodzina $n$-wymiarowych zmiennych losowych $x_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$, dla $t \in I$.

Proces $x$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem, jeżeli dla dowolnych $t \in I$ zmienna losowa $x_t$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna.

Przy ustalonym $\omega \in \Omega$, funkcję $x_t(\omega) = x(t, \omega)$, odwzorowującą przedział $I$ w $\mathbb{R}^n$, nazywamy trajektorią procesu $x$.

Proces $x$ jest procesem càdlàg, jeżeli ma prawie wszystkie trajektorie prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami. Proces $x$ jest procesem càglàd, jeżeli ma prawie wszystkie trajektorie lewostronnie ciągłe z prawostronnymi granicami.

Niech $\lambda$ oznacza miarę Lebesgue'a na $I$. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ oznacza najmniejszą $\sigma$-algebrę na $I \times \Omega$, ze względu na którą każdy $\mathbb{F}$–adaptowalny proces càglàd jest mierzalny względem miary produktowej $\lambda \otimes P$. $\sigma$-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ jest generowana przez klasę podzbiorów z $I \times \Omega$ postaci $\{0\} \times B_0$ oraz $(s, t] \times B$, gdzie $B_0 \in \mathcal{F}_0$ oraz $B \in \mathcal{F}_s$ dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$.
Proces $x$ jest $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem, jeżeli $x$ jest $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-mierzalny. Rodzina wszystkich procesów tego typu jest oznaczana symbolem $\mathcal{P}$.

Dla zmiennej losowej $x$, symbolem $E(x) = Ex$ będziemy oznaczać wartość oczekiwaną zmiennej $x$.

Dla pod- $\sigma$-algebry $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ oraz zmiennej losowej $x$, $E(x|\mathcal{G})$ oznaczać będzie warukową wartość oczekiwaną zmiennej $x$ względem $\mathcal{G}$.

Symbolem $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$ oznaczamy przestrzeń $\mathcal{F}$-mierzalnych funkcji $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ takich, że $E(|x|^2) < \infty$. Przestrzeń tę rozważamy z normą $\|x\|_{L^2} = (E(|x|^2))^{1/2}$.

$\mathbb{F}$–adaptowalny proces $M$ o wartościach rzeczywistych nazywamy $\mathbb{F}$–martyngałem, jeżeli

(i) $E(|M_t|) < \infty$, dla dowolnego $t \in I$,

(ii) jeżeli $s < t$, to $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ prawie na pewno.

Ponieważ wszystkie $\mathbb{F}$–martyngały mają prawostronnie ciągłe modyfikacje, będziemy zawsze zakładać, że rozpatrujemy ich prawostronnie ciągłą wersję. Zauważmy, że prawostronnie ciągły $\mathbb{F}$–martyngał jest procesem càdlàg, (Wniosek 1 z Twierdzenia I.2.9 z [33]).

Proces $M$ nazywamy jednostajnie całkowalnym $\mathbb{F}$–martyngałem, jeżeli $M$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem oraz zachodzi warunek $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \int_{\{|M_t|\geq n\}} |M_t| dP = 0$.

Proces $M$ nazywamy $\mathbb{F}$–martyngałem całkowalnym z kwadratem, jeżeli $M$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem oraz zachodzi warunek $\sup_{t\in I} E(M_t^2) < \infty$.

Dla $\mathbb{F}$–przewidywalnego procesu $g$ oraz $\mathbb{F}$–martyngału $M$, symbolem $\int g dM = \int g_\tau dM_\tau = (\int_0^t g_\tau dM_\tau)_{t\in I}$ oznaczamy proces będący całką stochastyczną typu Itô z procesu $g$ względem $\mathbb{F}$–martyngału $M$, (jego definicja i własności są omówione między innymi w książce [33]).

Symbolem $\mathcal{M}^2$ oznaczamy przestrzeń $\mathbb{F}$–martyngałów całkowalnych z kwadratem $M$ takich, że $M_0 = 0$ prawie na pewno. Przestrzeń $\mathcal{M}^2$ będziemy rozważać wraz z normą $\|M\|_{\mathcal{M}^2} = (EM_T^2)^{\frac{1}{2}}$, gdzie $M_T = \int_0^T dM_\tau$. Połóżmy także $(M, N) = E(M_T \cdot N_T)$ dla $M, N \in \mathcal{M}^2$. Wtedy $\mathcal{M}^2$ jest przestrzenią Hilberta, ([33]).

Niech $M \in \mathcal{M}^2$. Miarę $\mu_M$ na $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, zwaną miarą Doléans-Dade, stowarzyszoną z $\mathbb{F}$–martyngałem $M$ definiujemy w następujący sposób:
Niech $(s, t] \times B$ będzie "prostokątem" w $I \times \Omega$, gdzie $B \subset \Omega$ jest $\mathcal{F}_s$-mierzalnym zbiorem oraz $s < t$. Definiujemy funkcję zbioru $\lambda_M$ następująco

$$\lambda_M((s, t] \times B) = E(\mathbb{1}_B(M_t - M_s)^2)$$

i rozszerzamy tę funkcję do jednoznacznej $\sigma$-skończonej miary $\mu_M$ na $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, ([9] Rozdział 2.4).

Symbolem $\mathcal{M}_n^2$ będziemy oznaczać przestrzeń $n$-wymiarowych $\mathbb{F}$–martyngałów całkowalnych z kwadratem $M = (M^1, \ldots, M^n)$ takich, że dla $i = 1, \ldots, n$, $M^i \in \mathcal{M}^2$. Przestrzeń tę będziemy rozważać z normą

$$\|M\|_{\mathcal{M}_n^2} = (\textstyle\sum_{i=1}^n \|M\|_{\mathcal{M}^2}^2)^{1/2}.$$

Proces $M_- = (\lim_{s\uparrow t} M_s)_{t\in I}$ oznacza wersję càglàd procesu $M$.

Dla danego procesu $M \in \mathcal{M}^2$ niech $L_M^2 = \{f \in \mathcal{P} \ : E(\int_0^T |f_\tau|^2 d[M,M]_\tau) < \infty\}$, gdzie $[M,M]$ jest procesem wariancji kwadratowej postaci $[M,M] = M^2 - 2\int M_- dM$ oraz $M_{0-} = 0$. Przestrzeń $L_M^2$ będziemy rozważać wraz z normą $\|f\|_{L_M^2} = (\int_{I\times\Omega} |f_\tau|^2 d\mu_M)^{\frac{1}{2}}$. Dla danych procesów $M \in \mathcal{M}^2$ i $f \in L_M^2$ zachodzi własność izometrii, ([9] Rozdział 2.2)

$$\| \int_0^T f_\tau dM_\tau \|_{\mathcal{M}_n^2}^2 = E \int_0^T |f_\tau|^2 d[M,M]_\tau = \int_{I\times\Omega} |f_\tau|^2 d\mu_M = \|f\|_{L_M^2}^2. \tag{1.1}$$

**Definicja 1.1** ([33]) Ciąg procesów $\{x^n\}_{n\geq 1}$ zbiega do procesu $x$ jednostajnie na zbiorach zwartych według prawdopodobieństwa (w skrócie 'ucp'), jeżeli dla dowolnych $t \in I$, $\sup_{0\leq s\leq t} |x_s^n - x_s|$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

Dla procesu $x$ oraz $\mathbb{F}$–czasu zatrzymania $\alpha$ symbolem $x^\alpha$ oznaczamy proces postaci $x_t^\alpha = x_{t\wedge\alpha} = x_t \mathbb{1}_{\{t<\alpha\}} + x_\alpha \mathbb{1}_{\{t\geq\alpha\}}$, dla $t \in I$.

Lokalnym $\mathbb{F}$–martyngałem $M$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ nazywamy $\mathbb{F}$–adaptowalny proces càdlàg, dla którego istnieje taki ciąg rosnących $\mathbb{F}$–czasów zatrzymania $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = T$ prawie na pewno, że dla dowolnego $n$ proces $M_{t\wedge\alpha_n} \mathbb{1}_{\{\alpha_n>0\}}$ jest jednostajnie całkowalnym $\mathbb{F}$–martyngałem.

$\mathbb{F}$–adaptowalny proces càdlàg $A$ nazywamy FV–procesem, jeżeli ma prawie wszystkie trajektorie o wahaniu ograniczonym na zbiorach zwartych.

$\mathbb{F}$–adaptowalny proces càdlàg $Z$ o wartościach rzeczywistych jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, jeżeli można go przedstawić w postaci sumy: $Z = N + A$, gdzie $N$ jest lokalnym $\mathbb{F}$–martyngałem całkowalnym z kwadratem, natomiast $A$ jest FV–procesem, ([33] Twierdzenie III.1.1).

Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem. Proces $[Z,Z] = ([Z,Z]_t)_{t\in I}$ jest procesem wariancji kwadratowej dla procesu $Z$. Jest on określony podobnie jak na stronie 4 rozprawy dla $\mathbb{F}$–martyngału $M$.

Dla $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$, niech $L_Z$ oznacza zbiór $\mathbb{F}$–przewidywalnych procesów $x$, całkowalnych względem $Z$, ([33]).

Zbiór $K \subset L_Z$ nazywamy $\mathbb{F}$–dekomponowalnym, jeżeli dla dowolnych $g,h \in K$ oraz zbioru $B \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ zachodzi zależność: $1\!\!1_B h + 1\!\!1_D g \in K$, gdzie $D = (I \times \Omega) \setminus B$.

Symbolem $\mathcal{H}^2$ oznaczamy przestrzeń $\mathbb{F}$–semimartyngałów $Z$ o skończonej normie $\mathcal{H}^2$, gdzie

$$\|Z\|_{\mathcal{H}^2} = \|[N,N]_T^{1/2}\|_{L^2} + \|\int_0^T |dA_\tau|\,\|_{L^2}.$$

$|dA_\tau(\omega)|$ jest miarą wahania całkowitego na przedziale $I$ indukowaną przez odwzorowanie $\tau \mapsto A_\tau(\omega)$. Na podstawie Twierdzenia IV.2.1 z [33] wnioskujemy, że przestrzeń $\mathcal{H}^2$ jest przestrzenią Banacha.

Symbolem $\mathcal{H}^2_n$ będziemy oznaczać przestrzeń $n$-wymiarowych $\mathbb{F}$–semimartyngałów $Z = (Z^1,\ldots,Z^n)$, $Z^i \in \mathcal{H}^2$, $i = 1,\ldots,n$, o skończonej normie $\mathcal{H}^2_n$, gdzie

$$\|Z\|_{\mathcal{H}^2_n} = (\textstyle\sum_{i=1}^n \|Z\|^2_{\mathcal{H}^2})^{1/2}.$$

Dla danego procesu $Z \in \mathcal{H}^2$ określamy przestrzeń

$$L^2_Z = \{f \in \mathcal{P}:\ E(\int_0^T |f_\tau|^2 d[N,N]_\tau) + E(\int_0^T |f_\tau||dA_\tau|)^2 < \infty\}.$$

Przestrzeń tę będziemy rozważać z normą

$$\|f\|_{L^2_Z} = (E(\textstyle\int_0^T |f_\tau|^2 d[N,N]_\tau) + E(\int_0^T |f_\tau||dA_\tau|)^2)^{1/2}.$$

**Lemat 1.2** *Dla danych procesów $Z \in \mathcal{H}^2$ i $f \in L^2_Z$ zachodzi zależność*

$$\|\int f_\tau dZ_\tau\|^2_{\mathcal{H}^2_n} \le 2^n \|f\|^2_{L^2_Z}.$$

**Dowód.** Dla dowolnych procesów $Z \in \mathcal{H}^2$ oraz $f = (f^1, \dots, f^n) \in L^2_Z$ otrzymujemy na podstawie nierówności $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

$$\begin{aligned}
\| \int f_\tau dZ_\tau \|^2_{\mathcal{H}^2_n} &= \sum_{i=1}^n \| \int f^i_\tau dZ_\tau \|^2_{\mathcal{H}^2} \\
&= \sum_{i=1}^n ((E \int_0^T (f^i_\tau)^2 d[N,N]_\tau)^{1/2} + (E(\int_0^T |f^i_\tau||dA_\tau|)^2)^{1/2})^2 \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n (E \int_0^T (f^i_\tau)^2 d[N,N]_\tau + E(\int_0^T |f^i_\tau||dA_\tau|)^2) \\
&= 2(E \int_0^T \sum_{i=1}^n (f^i_\tau)^2 d[N,N]_\tau + E \sum_{i=1}^n (\int_0^T |f^i_\tau||dA_\tau|)^2).
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności

$$\textstyle\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|)^2 \leq 2^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

dostajemy

$$E \sum_{i=1}^n (\int_0^T |f^i_\tau||dA_\tau|)^2 \leq E(\int_0^T \sum_{i=1}^n |f^i_\tau||dA_\tau|)^2 \leq 2^{n-1} E(\int_0^T (\sum_{i=1}^n (f^i_\tau)^2)^{1/2} |dA_\tau|)^2.$$

Ponieważ $|f_\tau| = (\sum_{i=1}^n (f^i_\tau)^2)^{1/2}$, więc ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}
\| \int f_\tau dZ_\tau \|^2_{\mathcal{H}^2_n} &\leq 2E \int_0^T |f_\tau|^2 d[N,N]_\tau + 2 \cdot 2^{n-1} E(\int_0^T |f_\tau||dA_\tau|)^2 \\
&\leq 2^n (E \int_0^T |f_\tau|^2 d[N,N]_\tau + E(\int_0^T |f_\tau||dA_\tau|)^2) = 2^n \|f\|^2_{L^2_Z}.
\end{aligned}$$

■

Niech $x$ będzie $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem càdlàg. Przez $S^2$ oznaczamy przestrzeń procesów $x$ o skończonej normie $S^2$, gdzie $\|x\|_{S^2} = \| \sup_{t \in I} |x_t| \|_{L^2}$, natomiast $S^\infty$ oznacza przestrzeń procesów $x$ o skończonej normie $S^\infty$, gdzie $\|x\|_{S^\infty} = \| \sup_{t \in I} |x_t| \|_{L^\infty}$.

Dla $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z = N + A$ definiujemy

$$j_2(N, A) = \| [N,N]_T^{1/2} + \int_0^T |dA_\tau| \|_{L^2}.$$

Symbolem $\underline{H}^2$ oznaczamy przestrzeń $\mathbb{F}$–semimartyngałów $Z$ o skończonej normie $\underline{H}^2$, gdzie

$$\|Z\|_{\underline{H}^2} = \inf_{Z=N+A} j_2(N, A),$$

a infimum jest brane po wszystkich rozkładach semimartyngału $Z$.

W podobny sposób określamy przestrzeń $\underline{H}^\infty$ i normę dla tej przestrzeni.

Symbolem $\underline{H}^2_n$ będziemy oznaczać przestrzeń $n$-wymiarowych $\mathbb{F}$–semimartyngałów $Z = (Z^1, \ldots, Z^n)$, $Z^i \in \underline{H}^2$, $i = 1, \ldots, n$, o skończonej normie $\underline{H}^2_n$, gdzie

$$\|Z\|_{\underline{H}^2_n} = (\textstyle\sum_{i=1}^n \|Z\|^2_{\underline{H}^2})^{1/2}.$$

Dla przestrzeni Banacha $X$ symbolami $cl(X)$, $comp(X)$ oraz $conv(X)$ oznaczamy rodziny wszystkich niepustych podzbiorów przestrzeni $X$, które są, odpowiednio, domknięte, zwarte, wypukłe.

Symbolem $\mathrm{dist}(a, B)$ oznaczamy odległość elementu $a \in X$ od zbioru $B \in cl(X)$, natomiast $\overline{h}(B, D) = \sup_{a \in B} \mathrm{dist}(a, D)$, dla $D \in cl(X)$.

$H(B, D) = \max\{\overline{h}(B, D), \overline{h}(D, B)\}$ oznaczać będzie odległość Hausdorffa zbiorów $B, D \in cl(X)$.

Multifunkcja $G : \Omega \to cl(\mathbb{R}^n)$ jest $\mathcal{F}$–mierzalna, jeżeli dla dowolnego domkniętego podzbioru $B \in \mathbb{R}^n$, zbiór $\{\omega \in \Omega \,:\, G(\omega) \cap B \neq \emptyset\}$ jest $\mathcal{F}$-mierzalny.

Selekcją lub selektorem multifunkcji $G$ nazywamy dowolną funkcję $f$ taką, że $f(\omega) \in G(\omega)$.

Norma multifunkcji $G$ jest określona jako $\|G\| = \sup \|f\|$, po wszystkich selektorach $f$ multifunkcji $G$.

Wielowartościowym procesem stochastycznym $G = (G_t)_{t \in I}$ nazywamy rodzinę $\mathcal{F}$-mierzalnych odwzorowań wielowartościowych $G_t \ : \Omega \to cl(\mathbb{R}^n)$, dla każdego $t \in I$. Proces stochastyczny $G$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalny, jeżeli dla dowolnych $t \in I$ odwzorowanie $G_t : \Omega \to cl(\mathbb{R}^n)$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalne.

Przy ustalonym $\omega \in \Omega$, multifunkcję $G_t(\omega) = G(t, \omega)$, odwzorowującą przedział $I$ w $cl(\mathbb{R}^n)$, nazywamy trajektorią procesu wielowartościowego $G$.

**Definicja 1.3** Wielowartościowy proces stochastyczny $G$ jest procesem càdlàg, jeżeli posiada prawie wszystkie trajektorie prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami względem metryki Hausdorffa $H$. Wielowartościowy proces stochastyczny $G$ jest procesem càglàd, jeżeli posiada prawie wszystkie trajektorie lewostronnie ciągłe z prawostronnymi granicami względem metryki Hausdorffa $H$.

Wielowartościowy proces $G$ jest $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem, jeżeli $G$ jest $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-mierzalny. Rodzinę takich procesów oznaczamy, jak w przypadku jednowartościowym, przez $\mathcal{P}$.

**Definicja 1.4** Wielowartościowy proces $G$ jest $Z$-całkowo ograniczony, jeżeli istnieje taki rzeczywisty proces $m \in L^2_Z$, że $H(G, \{0\}) \leq m$, $\lambda \otimes P$–prawie wszędzie.

Poniżej zamieszczone zostały najważniejsze twierdzenia, z których korzystam w dalszej części rozprawy.

**Twierdzenie 1.5** [K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski ([4] Twierdzenie 8.1.3)] *Niech $X$ będzie zupełną ośrodkową przestrzenią metryczną, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ niech będzie przestrzenią z miarą. Jeżeli $F$ jest $\mathcal{F}$-mierzalnym odwzorowaniem wielowartościowym z $\Omega$ do $cl(X)$, to istnieje $\mathcal{F}$-mierzalna selekcja odwzorowania $F$.*

**Twierdzenie 1.6** [A.F. Fillipov ([24] Twierdzenie II.3.12)] *Niech $X$ będzie zupełną ośrodkową przestrzenią metryczną, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ niech będzie przestrzenią z miarą. Jeżeli $F$ jest $\mathcal{F}$-mierzalnym odwzorowaniem wielowartościowym z $\Omega$ do $comp(X)$, natomiast $g$ jest $\mathcal{F}$-mierzalnym odwzorowaniem z $\Omega$ do $X$, to istnieje $\mathcal{F}$-mierzalna selekcja $f$ odwzorowania $F$ taka, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$, $dist_X(g(\omega), F(\omega)) = d_X(g(\omega), f(\omega))$, gdzie $d_X$ jest odległością w przestrzeni $X$.*

**Twierdzenie 1.7** [H. Covitz, S.B. Nadler Jr. ([24] Twierdzenie II.4.4)]
*Niech $(X, \rho)$ będzie zupełną przestrzenią metryczną oraz $F : X \to cl(X)$ niech będzie wielowartościowym odwzorowaniem takim, że dla dowolnych $x, y \in X$,*
*$H(F(x), F(y)) \leq K\rho(x, y)$, gdzie $K \in [0, 1)$.*
*Wtedy istnieje $x \in X$ taki, że $x \in F(x)$.*

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie $\sigma$-skończoną przestrzenią z miarą. $X$ niech będzie rzeczywistą ośrodkową przestrzenią Banacha. Niech $\mathcal{B}_X$ oznacza $\sigma$-algebrę podzbiorów borelowskich w $X$. Niech $\phi : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ będzie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-mierzalną funkcją, a $f : \Omega \to X$ niech będzie $\mathcal{F}$-mierzalną funkcją. Definiujemy funkcjonał $I_\phi(f) = \int_\Omega \phi(\omega, f(\omega))d\mu$.

**Twierdzenie 1.8** [[18] Twierdzenie 2.2] *Niech $F$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym z $\Omega$ do $cl(X)$, $\mathcal{S}^2_F = \{f \in L^2(\Omega; X) : \ f(\omega) \in F(\omega)$ prawie wszędzie$\}$. $\phi : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ niech będzie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-mierzalną funkcją, ciągłą w $x$ dla dowolnych $\omega \in \Omega$. Niech funkcjonał $I_\phi(f)$ będzie określony dla dowolnych $f \in \mathcal{S}^2_F$ spełniających $I_\phi(f_0) < \infty$, dla pewnych $f_0 \in \mathcal{S}^2_F$. Wtedy zachodzą warunki*

*(i)* $\inf_{f \in \mathcal{S}^2_F} I_\phi(f) = \int_\Omega \inf_{x \in F(\omega)} \phi(\omega, x)d\mu$,

*(ii)* $\sup_{f \in \mathcal{S}^2_F} I_\phi(f) = \int_\Omega \sup_{x \in F(\omega)} \phi(\omega, x)d\mu$.

**Twierdzenie 1.9** [[30] Twierdzenie 2] *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\underline{H}^2$. Niech $F$ będzie $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym o wartościach wypukłych, $\mathcal{S}_Z(F)$ oznacza zbiór $Z$-całkowalnych selektorów z $F$. Jeżeli $x$ jest procesem càdlàg takim, że dla dowolnych $s, t$ takich, że $0 \leq s \leq t \leq T$, zachodzi warunek $x_t - x_s \in cl_{L^2} \int_s^t F_\tau dZ_\tau$, to istnieje proces $g \in cl_{L^2_Z} \mathcal{S}_Z(F)$ taki, że $x_t = x_0 + \int_0^t g_\tau dZ_\tau$.*

**Twierdzenie 1.10** [[33] Twierdzenie II.5.19] *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem oraz niech $f$ będzie $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem càglàd. Wtedy stochastyczny proces całkowy $Y = \int f_\tau dZ_\tau$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, a dla dowolnego $\mathbb{F}$–adaptowalnego procesu càglàd $g$ zachodzi*

$$\int g_\tau dY_\tau = \int g_\tau d(\int f_s dZ_s)_\tau = \int (gf)_\tau dZ_\tau.$$

**Twierdzenie 1.11** [Nierówność Kunity-Watanabe ([33] Twierdzenie II.6.25)] *Niech $Y, Z$ będą $\mathbb{F}$–semimartyngałami oraz niech $g, h$ będą dwoma rzeczywistymi procesami mierzalnymi. Wtedy zachodzi prawie na pewno nierówność*

$$\int_0^T |g_\tau||h_\tau||d[Y, Z]_\tau| \leq (\int_0^T g^2_\tau d[Y, Y]_\tau)^{1/2}(\int_0^T h^2_\tau d[Z, Z]_\tau)^{1/2}.$$

**Twierdzenie 1.12** [[33], Wniosek 4 z Twierdzenia II.6.27] *Jeżeli $M$ jest lokalnym $\mathbb{F}$–martyngałem oraz $E([M,M]_T) < \infty$, to $M$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem całkowalnym z kwadratem. Ponadto $E(M_t^2) = E([M,M]_t)$, dla dowolnych $t \in I$.*

**Twierdzenie 1.13** [Fundamentalne Twierdzenie dla Lokalnych Martyngałów ([33] Twierdzenie III.6.29)] *Niech $M$ będzie lokalnym $\mathbb{F}$–martyngałem oraz niech $\beta > 0$. Istnieją wtedy lokalne $\mathbb{F}$–martyngały $N$, $A$ takie, że $A$ jest FV–procesem, skoki lokalnego $\mathbb{F}$–martyngału $N$ są ograniczone przez $2\beta$ oraz $M = N + A$.*

**Twierdzenie 1.14** [[33] Twierdzenie IV.2.5] *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$. Wtedy $E((\sup_{t\in I}|Z_t|)^2) \leq 8\|Z\|^2_{\mathcal{H}^2}$.*

**Twierdzenie 1.15** [O Zbieżności Zmajoryzowanej ([33] Twierdzenie IV.2.32)] *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem, natomiast $f^n \in \mathcal{P}$ niech będzie ciągiem rzeczywistych procesów, zbieżnym do granicy $f$ prawie na pewno. Jeżeli istnieje taki rzeczywisty proces $g \in L_Z$, że dla dowolnych $n$, $|f^n| \leq g$, to $f^n$ i $f$ są elementami zbioru $L_Z$ oraz całka $\int f^n_\tau dZ_\tau$ zbiega do całki $\int f_\tau dZ_\tau$ w sensie ucp.*

**Twierdzenie 1.16** [[33] Twierdzenie V.2.2] *Dla $1 \leq p \leq \infty$ istnieje stała $c_p$ taka, że dla dowolnego $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$, $Z_0 = 0$, zachodzi nierówność*

$$\|Z\|_{S^p} \leq c_p \|Z\|_{\underline{H}^p}.$$

**Twierdzenie 1.17** [Nierówność Emery'ego ([33] Twierdzenie V.2.3)] *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem, $f$ niech będzie $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem càglàd oraz $1/p + 1/q = 1/r$ dla $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Wtedy*

$$\|\int f_\tau dZ_\tau\|_{\underline{H}^r} \leq \|f\|_{S^p}\|Z\|_{\underline{H}^q}.$$

# Rozdział 2

# Wielowartościowa całka stochastyczna typu Itô

W niniejszym rozdziale przedstawione zostały wyniki badań dotyczących własności wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô względem $\mathbb{F}$–semimartyngału.

W pierwszej części zdefiniowany został zbiór $\mathcal{S}_Z(F)$ selektorów z $\mathbb{F}$–przewidywalnego procesu wielowartościowego $F$ całkowalnych względem $Z$. Podano warunki gwarantujące niepustość, ograniczoność i dekomponowalność tego zbioru. Pozwoliło to na poprawne określenie wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô z procesu $F$ względem $Z$ i zbadanie jej własności. Pokazano, że całka ta zachowuje powyższe własności zbioru $\mathcal{S}_Z(F)$.

Druga część rozdziału poświęcona jest badaniu zagadnień przechodzenia z odległością Hausdorffa pod znak wielowartościowej całki stochastycznej względem $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$. Otrzymane wyniki, (Twierdzenia 2.9, 2.10 i 2.11), stanowią uogólnienia rezultatów M. Kisielewicza z pracy [23], w której badany był podobny problem, ale dla wielowartościowych całek względem procesu Wienera i całek z miarą Poissona. Zasadniczy problem stanowił tu brak własności izometrii, która była istotnie wykorzystywana w pracy [23]. Zastąpiono ją konstrukcją odpowiedniej miary losowej związanej z procesem o wahaniu ograniczonym pochodzącym z rozkładu $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$.

Twierdzenia te zostały wykorzystane w rozdziale czwartym do badania własności zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznej.

Niech $I$ oznacza przedział domknięty $[0,T]$ w $\mathbb{R}_+$.

Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem, a $G$ niech będzie $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym. Zbiór $\mathcal{S}_Z(G)$ określamy jako

$$\mathcal{S}_Z(G) := \{f \in L^2_Z : \ f(t,\omega) \in G(t,\omega), \lambda \otimes P\text{– prawie wszędzie}\}.$$

$\mathbb{F}$–przewidywalny proces wielowartościowy $G$ jest całkowalny względem $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$ albo po prostu $Z$-całkowalny, jeżeli $\mathcal{S}_Z(G)$ jest zbiorem niepustym.

**Twierdzenie 2.1** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, $Z_0 = 0$. Jeżeli $G$ jest $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym, to $\mathcal{S}_Z(G)$ jest niepustym i ograniczonym podzbiorem z $L^2_Z$.*

**Dowód.** Korzystając z Twierdzenia Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego, (Twierdzenie 1.5), istnieje $\mathbb{F}$–przewidywalny proces $f$ taki, że $f(t,\omega) \in G(t,\omega)$, $\lambda \otimes P$– prawie wszędzie. Z założenia o procesie $G$ wynika, że $\|f\|_{L^2_Z} \le \|m\|_{L^2_Z} < \infty$, a to oznacza, że $f \in \mathcal{S}_Z(G)$. Zatem zbiór $\mathcal{S}_Z(G)$ jest niepusty.

Jego ograniczoność wynika z $Z$-całkowej ograniczoności procesu $G$. ■

**Twierdzenie 2.2** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, $Z_0 = 0$. Jeżeli $G$ jest $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym, to $\mathcal{S}_Z(G)$ jest zbiorem $\mathbb{F}$–dekomponowalnym.*

**Dowód.** Niech będą dane $f, g \in \mathcal{S}_Z(G)$, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ oraz $D = (I \times \Omega) \setminus B$. Należy pokazać, że $1\!\!1_B f + 1\!\!1_D g \in L^2_Z$ oraz $1\!\!1_B f + 1\!\!1_D g \in G$, $\lambda \otimes P$– prawie wszędzie.

Ponieważ zbiory $B$ i $D$ są $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-mierzalne, podobnie jak procesy $f, g$, więc proces $1\!\!1_B f + 1\!\!1_D g$ jest również $\mathcal{P}(\mathbb{F})$-mierzalny. Ponadto

$$\begin{aligned}
\|1\!\!1_B f + 1\!\!1_D g\|_{L^2_Z} &\le \|1\!\!1_B f\|_{L^2_Z} + \|1\!\!1_D g\|_{L^2_Z} \\
&= (E\int_0^T |1\!\!1_B f_\tau|^2 d[N,N]_\tau + E(\int_0^T |1\!\!1_B f_\tau||dA_\tau|)^2)^{1/2} \\
&+ (E\int_0^T |1\!\!1_D g_\tau|^2 d[N,N]_\tau + E(\int_0^T |1\!\!1_D g_\tau||dA_\tau|)^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że $|\mathbb{1}_B f_\tau| \leq |f_\tau|$ i $|\mathbb{1}_D g_\tau| \leq |g_\tau|$ dla $\tau \in I$, oraz z Twierdzenia o Zbieżności Zmajoryzowanej, (Twierdzenie 1.15), otrzymujemy, że

$$\|\mathbb{1}_B f + \mathbb{1}_D g\|_{L^2_Z} \leq \|f\|_{L^2_Z} + \|g\|_{L^2_Z} < \infty.$$

$\sigma$-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ jest pod- $\sigma$-algebrą $\sigma$-algebry $\lambda \otimes P$. Zatem zbiory $B$ i $D$ są $\lambda \otimes P$-mierzalne. Ponieważ $f, g \in G$, $\lambda \otimes P$– prawie wszędzie, więc $\mathbb{1}_B f + \mathbb{1}_D g \in G$, $\lambda \otimes P$– prawie wszędzie. ■

**Definicja 2.3** Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, $Z_0 = 0$. $G$ niech będzie $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym. Wielowartościowa całka stochastyczna z procesu $G$ względem $Z$ jest zdefiniowana jako zbiór $\int G_\tau dZ_\tau = \{\int g_\tau dZ_\tau \ : g \in \mathcal{S}_Z(G)\}$.
Dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$ definiujemy także

$$\int_s^t G_\tau dZ_\tau = \{\int_s^t g_\tau dZ_\tau \ : g \in \mathcal{S}_Z(G)\}.$$

**Definicja 2.4** Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem, natomiast $f \in L^2_Z$. Odwzorowanie $\mathcal{J}_Z : L^2_Z \to \mathcal{H}^2_n$ jest zdefiniowane jako $\mathcal{J}_Z(f) = (\mathcal{J}_Z(f)_t)_{t\in I} = \int f_\tau dZ_\tau$ oraz $\mathcal{J}_Z(f)_t = \int_0^t f_\tau dZ_\tau$, dla dowolnego $t \in I$.

Odwzorowanie $\mathcal{J}_Z$ jest liniowe i ciągłe. Jego liniowość wynika z definicji, natomiast ciągłość z Lematu 1.2.

**Twierdzenie 2.5** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, $Z_0 = 0$. Jeżeli $G$ jest $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym, to*

*(i)* $\int G_\tau dZ_\tau = \mathcal{J}_Z(\mathcal{S}_Z(G))$,

*(ii)* $\int_s^t G_\tau dZ_\tau = \mathcal{J}_Z(\mathbb{1}_{(s,t]}\mathcal{S}_Z(G))_t$ *dla* $s, t \in I$, $s < t$.

**Dowód.** Warunek (i) wynika bezpośrednio z definicji całki $\int G_\tau dZ_\tau$.
Dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$ z definicji całek $\int_s^t G_\tau dZ_\tau$ oraz $\mathcal{J}_Z(f)_t$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_s^t G_\tau dZ_\tau &= \{\mathcal{J}_Z(f)_t - \mathcal{J}_Z(f)_s \ : f \in \mathcal{S}_Z(G)\} \\
&= \{\mathcal{J}_Z(\mathbb{1}_{[0,t]} f)_t - \mathcal{J}_Z(\mathbb{1}_{[0,s]} f)_t \ : f \in \mathcal{S}_Z(G)\} \\
&= \{\mathcal{J}_Z(\mathbb{1}_{(s,t]} f)_t \ : f \in \mathcal{S}_Z(G)\} = \mathcal{J}_Z(\mathbb{1}_{(s,t]}\mathcal{S}_Z(G))_t,
\end{aligned}$$

co należało pokazać. ■

**Twierdzenie 2.6** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, $Z_0 = 0$. Jeżeli $G$ jest $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym, to $\int G_\tau dZ_\tau$ jest niepustym i ograniczonym podzbiorem z $\mathcal{H}^2_n$.*

**Dowód.** Z definicji odwzorowania liniowego $\mathcal{J}_Z$, (Definicja 2.4), oraz Twierdzenia 2.5(i) otrzymujemy, że $\int G_\tau dZ_\tau = \mathcal{J}_Z(\mathcal{S}_Z(G))$. Ponieważ zbiór $\mathcal{S}_Z(G)$ jest niepusty na podstawie Twierdzenia 2.1, więc zbiór $\int G_\tau dZ_\tau$ jest także zbiorem niepustym.
Jego ograniczoność w przestrzeni $\mathcal{H}^2_n$ wynika z ograniczoności zbioru $\mathcal{S}_Z(G)$, (Twierdzenie 2.1), i ciągłości odwzorowania $\mathcal{J}_Z$. ■

**Twierdzenie 2.7** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, $Z_0 = 0$. Jeżeli $G$ jest $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym, to dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$, $\int_s^t G_\tau dZ_\tau$ jest zbiorem $\mathcal{F}_s$-dekomponowalnym.*

**Dowód.** Weźmy dowolne $s, t \in I$ takie, że $s < t$. Niech dane będą: zbiór $B \in \mathcal{F}_s$ oraz $J^1, J^2 \in \int_s^t G_\tau dZ_\tau$. Istnieją wtedy takie $f^1, f^2 \in \mathcal{S}_Z(G)$, że $J^1 = \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]} f^1)_t$ oraz $J^2 = \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]} f^2)_t$. Niech $D = \Omega \setminus B$, natomiast $\beta_s^t = (I \setminus (s,t]) \times \Omega \cup (s,t] \times D$ niech będzie dopełnieniem zbioru $(s,t] \times B$ w $I \times \Omega$. Wtedy

$$\mathbb{I}_B J^1 = \mathbb{I}_B \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]} f^1)_t = \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]}(\mathbb{I}_{(s,t]\times B} f^1))_t$$

$$\text{oraz } \mathbb{I}_D J^2 = \mathbb{I}_D \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]} f^2)_t = \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]}(\mathbb{I}_{(s,t]\times D} f^2))_t = \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]}(\mathbb{I}_{\beta_s^t} f^2))_t.$$

Zatem

$$\mathbb{I}_B J^1 + \mathbb{I}_D J^2 = \mathcal{J}_Z(\mathbb{I}_{(s,t]}(\mathbb{I}_{(s,t]\times B} f^1 + \mathbb{I}_{\beta_s^t} f^2))_t.$$

Korzystając z $\mathbb{F}$–dekomponowalności zbioru $\mathcal{S}_Z(G)$, (Twierdzenie 2.2), i faktu, że $(s,t] \times B$ jest $\mathbb{F}$–przewidywalnym "prostokątem", a $\beta_s^t$ jest jego dopełnieniem, otrzymujemy, że $\mathbb{I}_{(s,t]\times B} f^1 + \mathbb{I}_{\beta_s^t} f^2 \in \mathcal{S}_Z(G)$. Oznacza to, że $\mathbb{I}_B J^1 + \mathbb{I}_D J^2 \in \int_s^t G_\tau dZ_\tau$.

■

**Uwaga 2.8** W dowodach Twierdzeń 2.9, 2.10 i 2.11 zastosowano odmienną notację, niż w pozostałej części pracy. Zamiast skróconych oznaczeń: $f_t$, $g_t$, $F_t$, $G_t$, $A_t$ stosowany jest pełny zapis: $f(t,\omega)$, $g(t,\omega)$, $F(t,\omega)$, $G(t,\omega)$, $A_t(\omega)$, aby wyraźnie zaznaczyć zmienne, względem których przeprowadza się całkowanie.

**Twierdzenie 2.9** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$, rozkładalnym na sumę $Z = M + A$, gdzie $M$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem całkowalnym z kwadratem, a $A$ jest $FV$–procesem. Niech $g$ będzie $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem, a $G$ niech będzie $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym. Istnieje wtedy stała $K \geq 0$ taka, że*

$$dist^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int g_\tau dZ_\tau, \int G_\tau dZ_\tau) \leq K \cdot \| \int dist^2(g_\tau, G_\tau) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2}.$$

**Dowód.** Z definicji normy $\mathcal{H}^2_n$ i dowodu Lematu 1.2 otrzymujemy

$$J = \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int g_\tau dZ_\tau, \int G_\tau dZ_\tau) = \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} \| \int g_\tau dZ_\tau - \int f_\tau dZ_\tau \|^2_{\mathcal{H}^2_n}$$
$$\leq 2^n \cdot \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} (E(\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d[M,M]_\tau)$$
$$+ E(\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)||dA_\tau(\omega)|)^2).$$

Korzystając z nierówności Kunity-Watanabe, (Twierdzenie 1.11), dostajemy

$$J \leq 2^n \cdot \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} (\int_\Omega (\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d[M,M]_\tau) P(d\omega)$$

$$+ \int_\Omega (\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 \, |dA_\tau(\omega)| \cdot \int_0^T |dA_\tau(\omega)|) P(d\omega)).$$

Niech $\mu_M$ oznacza miarę Doléans-Dade związaną z $\mathbb{F}$–martyngałem $M$, (zdefiniowaną na str. 3 rozprawy). Niech $c_A(\omega) = \int_0^T |dA_\tau(\omega)|$ oznacza wahanie trajektorii procesu $A$ na przedziale $I = [0,T]$. Zdefiniujemy teraz jądro miary, (miarę losową), dla zbiorów borelowskich z $I$ jako

$$\alpha(\omega, d\tau) := c_A(\omega) \, |dA_\tau(\omega)| \, .$$

Następnie określamy miarę $\nu_A$ na $\sigma$-algebrze $\mathbb{F}$–przewidywalnych zbiorów z $I \times \Omega$ jako

$$\nu_A(B) = \int_\Omega \int_0^T \mathbb{I}_B(\omega, \tau)\alpha(\omega, d\tau)P(d\omega).$$

Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
J &\le 2^n \cdot \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} \Big(\int_\Omega \Big(\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d[M,M]_\tau\Big)P(d\omega) \\
&+ \int_\Omega \Big(\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 \alpha(\omega, d\tau)\Big)P(d\omega)\Big) \\
&\le 2^n \cdot \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} \Big(\int_{\Omega \times I} |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d\mu_M + \int_{\Omega \times I} |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d\nu_A\Big) \\
&= 2^n \cdot \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} \Big(\int_{\Omega \times I} |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d\mu^*\Big),
\end{aligned}$$

gdzie $\mu^* = \mu_M + \nu_A$.

Na podstawie Twierdzenia 1.8 ostatnią całkę możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
2^n \cdot \int_{\Omega \times I} \inf_{x \in G(\tau,\omega)} |g(\tau,\omega) - x|^2 d\mu^* &= 2^n \cdot \int_{\Omega \times I} \mathrm{dist}^2(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) d\mu^* \\
&= 2^n \cdot \Big(\int_\Omega \Big(\int_0^T \mathrm{dist}^2(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) d[M,M]_\tau\Big)P(d\omega) \\
&+ \int_\Omega \Big(c_A(\omega) \cdot \int_0^T \mathrm{dist}^2(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega))\ |dA_\tau(\omega)|\Big)P(d\omega)\Big).
\end{aligned}$$

Stosując ponownie nierówność Kunity-Watanabe, (Twierdzenie 1.11), do pierwszego składnika oraz nierówność Höldera do drugiego dostajemy, że

$$\begin{aligned}
J &\le 2^n \cdot \Big(\Big\|\Big(\int_0^T \mathrm{dist}^4(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) d[M,M]_\tau\Big)^{1/2}\Big\|_{L^2} \cdot \Big\|\Big(\int_0^T d[M,M]_\tau\Big)^{1/2}\Big\|_{L^2} \\
&+ \|c_A(\omega)\|_{L^2} \cdot \Big\| \int_0^T \mathrm{dist}^2(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega))\ |dA_\tau(\omega)|\ \Big\|_{L^2}\Big) \\
&\le 2^n \cdot \Big(E[M,M]_T^{1/2} \cdot \Big(\int_\Omega \int_0^T \mathrm{dist}^4(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) d[M,M]_\tau P(d\omega)\Big)^{1/2} \\
&+ \|c_A(\omega)\|_{L^2} \cdot \Big(\int_\Omega \Big(\int_0^T \mathrm{dist}^2(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega))\ |dA_\tau(\omega)|\Big)^2 P(d\omega)\Big)^{1/2}\Big) \\
&\le K \cdot \Big\| \int \mathrm{dist}^2(g(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) dZ_\tau \Big\|_{\mathcal{H}^2},
\end{aligned}$$

gdzie $K = 2^n \cdot \max\{\|c_A(\omega)\|_{L^2}, E[M,M]_T^{1/2}\}$, co kończy dowód twierdzenia. ■

**Twierdzenie 2.10** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$. Niech $g$ będzie $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem, a $G$ niech będzie $Z$-całkowo ograniczonym $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem wielowartościowym. Istnieje wtedy stała $K \geq 0$ taka, że*

$$dist^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int g_\tau dZ_\tau, \int G_\tau dZ_\tau) \leq K \cdot \| \int dist^2(g_\tau, G_\tau) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2}.$$

**Dowód.** Ponieważ $Z$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, więc istnieje rozkład $Z = N + A$, gdzie $N$ jest lokalnym $\mathbb{F}$–martyngałem, natomiast $A$ jest FV–procesem. Postępując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.9 otrzymujemy

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int g_\tau dZ_\tau, \int G_\tau dZ_\tau) \\ &\leq 2^n \cdot \inf_{f \in \mathcal{S}_Z(G)} (\int_\Omega (\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d[N,N]_\tau) P(d\omega) \\ &+ \int_\Omega (\int_0^T |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 \, |dA_\tau(\omega)| \cdot \int_0^T |dA_\tau(\omega)|) P(d\omega)). \end{aligned}$$

Ponieważ $Z \in \mathcal{H}^2$, więc $E([N,N]_T) < \infty$. Korzystając z Twierdzenia 1.12 wnioskujemy, że lokalny $\mathbb{F}$–martyngał $N$ jest $\mathbb{F}$–martyngałem całkowalnym z kwadratem. Możemy więc określić miarę Doléans-Dade $\mu_N$ związaną z $\mathbb{F}$–martyngałem $N$ oraz funkcję $c_A(\omega) = \int_0^T |dA_\tau(\omega)|$.

Dalsza część dowodu będzie przebiegać tak jak dowód Twierdzenia 2.9. Należy tylko zamienić proces $[M,M]$ na $[N,N]$ oraz miarę $\mu_M$ na $\mu_N$. W rezultacie otrzymamy tezę twierdzenia, w której stała $K$ jest określona następująco:

$$K = 2^n \cdot \max\{\|c_A(\omega)\|_{L^2}, E[N,N]_T^{1/2}\}. \qquad \blacksquare$$

**Twierdzenie 2.11** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\mathcal{H}^2$. Niech $F, G$ będą $Z$-całkowo ograniczonymi $\mathbb{F}$–przewidywalnymi procesami wielowartościowymi. Istnieje wtedy stała $K \geq 0$ taka, że*

$$H^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int G_\tau dZ_\tau, \int F_\tau dZ_\tau) \leq K \cdot \| \int H^2(G_\tau, F_\tau) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2}.$$

**Dowód.** Niech $Z = N + A$ będzie rozkładem $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$ na sumę lokalnego $\mathbb{F}$–martyngału $N$ oraz FV–procesu $A$. Korzystając z definicji odległości

Hausdorffa dostajemy

$$
\begin{aligned}
&H^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int G_\tau dZ_\tau, \int F_\tau dZ_\tau) \\
&\quad = \max\{\sup_{g\in\mathcal{S}_Z(G)} \operatorname{dist}^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int g_\tau dZ_\tau, \int F_\tau dZ_\tau), \\
&\qquad\qquad \sup_{f\in\mathcal{S}_Z(F)} \operatorname{dist}^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int f_\tau dZ_\tau, \int G_\tau dZ_\tau)\} = \max\{J_1, J_2\}.
\end{aligned}
$$

Z dowodu Twierdzenia 2.10 dla pierwszego ze składników otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \sup_{g\in\mathcal{S}_Z(G)} \operatorname{dist}^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int g_\tau dZ_\tau, \int F_\tau dZ_\tau) \\
&\le 2^n \cdot \sup_{g\in\mathcal{S}_Z(G)} \inf_{f\in\mathcal{S}_Z(F)} (\int_{\Omega\times I} |g(\tau,\omega) - f(\tau,\omega)|^2 d\mu^*),
\end{aligned}
$$

gdzie $\mu^*$, tak jak poprzednio, oznacza miarę $\mu^* = \mu_N + \nu_A$. Stosując dwukrotnie Twierdzenie 1.8, (odpowiednio dla funkcji "inf" oraz "sup"), dostajemy

$$
J_1 \le 2^n \cdot \int_{\Omega\times I} \sup_{y\in G(\tau,\omega)} \inf_{x\in F(\tau,\omega)} |y-x|^2 d\mu^* = 2^n \cdot \int_{\Omega\times I} \overline{h}^{\,2}(G(\tau,\omega), F(\tau,\omega)) d\mu^*,
$$

gdzie $\overline{h}(B,D) = \sup_{a\in B} \operatorname{dist}(a,D)$. Postępując dalej tak jak w dowodzie Twierdzenia 2.10 otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le K \cdot \| \int \overline{h}^{\,2}(G(\tau,\omega), F(\tau,\omega)) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2} \\
&\le K \cdot \| \int H^2(G(\tau,\omega), F(\tau,\omega)) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2}.
\end{aligned}
$$

W przypadku drugiego składnika wystarczy zamienić ze sobą procesy $F$ i $G$. W rezultacie dostajemy

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \sup_{f\in\mathcal{S}_Z(F)} \operatorname{dist}^2_{\mathcal{H}^2_n}(\int f_\tau dZ_\tau, \int G_\tau dZ_\tau) \\
&\le K \cdot \| \int \overline{h}^{\,2}(F(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2} \\
&\le K \cdot \| \int H^2(F(\tau,\omega), G(\tau,\omega)) dZ_\tau \|_{\mathcal{H}^2},
\end{aligned}
$$

gdzie $K = 2^n \cdot \max\{\|c_A(\omega)\|_{L^2}, E[N,N]_T^{1/2}\}$, co kończy dowód twierdzenia. ■

# Rozdział 3

# Wielowartościowa całka stochastyczna typu Stratonowicza

W niniejszym rozdziale przedstawione zostały wyniki badań nad własnościami wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza. W znanych mi dotychczas opublikowanych pracach na ten temat wielowartościową całkę typu Stratonowicza określano dla procesów będących superpozycją deterministycznej multifunkcji różniczkowalnej w sensie Hukuhary i ciągłego semimartyngału, ([17]), albo procesów powstałych ze złożenia deterministycznej multifunkcji górnie oddzielalnej i ciągłego semimartyngału, ([28]). Wielowartościowa całka typu Stratonowicza badana w rozprawie jest określona dla stochastycznych $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnych procesów wielowartościowych. Jest to klasa procesów, która nie musi obejmować procesów rozważanych we wspomnianych pracach, ani zawierać się w klasach procesów rozpatrywanych w pracach [17, 28]. Wzajemne relacje między tymi klasami mogą stanowić pole do dalszych badań.

Definicję wielowartościowej całki typu Stratonowicza poprzedza analiza całek stochastycznych typu forward i backward, których wzajemne zależności wykorzystują tzw. metodę odwracania czasu. Obie te całki znalazły zastosowanie w konstrukcji wielowartościowej całki typu Stratonowicza przedstawionej w rozprawie.

Rozdział podzielony został na dwie części.

W pierwszej części omówione zostały własności jednowartościowych całek stochastycznych typu forward, backward oraz Stratonowicza, (definicje na podstawie pracy [13]). Udowodnione zostały własności tych całek związane z przechodzeniem z funkcją charakterystyczną pod znak całki niezbędne dla uzyskania zasadniczego wyniku tego rozdziału.

W części drugiej udowodnione zostało twierdzenie o istnieniu $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnej selekcji dla $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnego procesu wielowartościowego. Wynik ten pozwala na pokazanie istnienia, (niepustości), wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza zdefiniowanej w tym rozdziale. Kluczowym wynikiem tej części rozprawy jest twierdzenie aproksymacyjne, (Twierdzenie 3.19), dla badanej całki wielowartościowej, które zostało uzyskane przez połączenie metody odwracania czasu z ideą pochodzącą z pracy J. Motyla [30] i dotyczącą wielowartościowej całki typu Itô.

## 3.1 Całki stochastyczne typu forward i backward

F. Russo i P. Vallois w pracy [34] zdefiniowali stochastyczne całki typu forward, backward oraz symmetric jako rozszerzenie, odpowiednio, całek, Itô, backward oraz Stratonowicza. Definicje te były modyfikowane w pracach [13, 35]. W rozprawie użyto definicji pochodzącej z pracy [13]. W tej części rozprawy przedstawiono własności powyższych całek uzyskane przez F. Russo i P. Vallois w [35] oraz wraz z M. Errami w [13], a także te własności uzyskane przez autora, które są niezbędne w dalszej części rozprawy.

Niech $I$ oznacza dowolny przedział domknięty. Dla uproszczenia zapisu będziemy zakładać, bez zmniejszenia ogólności, że $I = [0, 1]$.

**Definicja 3.1** ([13]) Proces stochastyczny $x$ nazywamy procesem RV–càdlàg [RV–càglàd], jeżeli jest procesem càdlàg [càglàd] oraz jest ciągły dla $t = 0$ i $t = 1$.

**Definicja 3.2** ([13]) Niech $\{\tau_n\}$ oznacza taki podział odcinka $I$, że $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Przez $|\tau_n|$ oznaczamy $\sup_i(t_{i+1} - t_i)$. Niech $g$ oraz $h$ będą procesami

RV–càdlàg. Określamy teraz

$$I^{-}_{\tau_n}(g,dh)(a) = \sum_i g(t_i \wedge a)(h(t_{i+1} \wedge a) - h(t_i \wedge a)),$$
$$I^{+}_{\tau_n}(g,dh)(a) = \sum_i g(t_{i+1} \wedge a)(h(t_{i+1} \wedge a) - h(t_i \wedge a)),$$
$$I^{o}_{\tau_n}(g,dh)(a) = 1/2\,(I^{+}_{\tau_n}(g,dh)(a) + I^{-}_{\tau_n}(g,dh)(a)).$$

Jeżeli dla dowolnego ciągu $\{\tau_n\}$ podziałów odcinka $I$ oraz dla dowolnego $0 < a \leq 1$ powyższe sumy są zbieżne w sensie ucp, (Definicja 1.1), gdy $|\tau_n| \to 0$ dla $n \to \infty$ oraz ich granice nie zależą od wyboru ciągu podziałów $\{\tau_n\}$, to granice te nazywamy odpowiednio całkami forward, backward oraz Stratonowicza i oznaczamy przez $(\int_{(0,\cdot]} gd^{-}h)_a$, $(\int_{(0,\cdot]} gd^{+}h)_a$, $(\int_{(0,\cdot]} g \circ dh)_a$, lub krócej przez $\int_{(0,a]} gd^{-}h$, $\int_{(0,a]} gd^{+}h$, $\int_{(0,a]} g \circ dh$.

**Definicja 3.3** ([13]) Dla procesów stochastycznych RV–càdlàg $g$, $h$ oraz dowolnych liczb $0 < a < 1$ określamy $\int_{(0,a)} gd^{\pm}h = (\int_{(0,\cdot]} gd^{\pm}h)_{a-} = \lim_{t\uparrow a} \int_{(0,t]} gd^{\pm}h$.

**Definicja 3.4** ([13]) Dla procesu stochastycznego RV–càdlàg $g$ określamy

$$\tilde{g}_t = (g_t)^{\sim} = g_{(1-t)-},$$

gdzie $g_{t-} = \lim_{s\uparrow t} g_s$. Proces $\tilde{g}$ nazywamy procesem z czasem odwróconym.

W Lematach 3.5 i 3.6 zebrane zostały własności, pochodzące z prac [13] oraz [34], które będą wykorzystane w dalszej części tego rozdziału.

**Lemat 3.5** *Dla procesów stochastycznych RV–càdlàg $g$, $h$ oraz dowolnych liczb $0 \leq a < b \leq 1$ zachodzą zależności*

*(i)* $$\int_{(a,b]} gd^{\pm}h = \int_{(0,b]} gd^{\pm}h - \int_{(0,a]} gd^{\pm}h,$$

*(ii)* $$\int_{(a,b]} g \circ dh = 1/2 \cdot (\int_{(a,b]} gd^{+}h + \int_{(a,b]} gd^{-}h),$$

*(iii)* $$\int_{[a,b)} gd^{\pm}h = \int_{(0,b)} gd^{\pm}h - \int_{(0,a)} gd^{\pm}h,$$

*(iv)* $$\int_{(0,a]} \tilde{g}d^{\pm}\tilde{h} = -\int_{[1-a,1)} gd^{\mp}h.$$

**Lemat 3.6** *Niech $g$ oraz $Z$ będą procesami RV–càdlàg. Zakładamy ponadto, że $Z$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, a $g$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem. Zachodzi wtedy zależność*

$$\int_{(0,\cdot]} g d^- Z = \int_{(0,\cdot]} g_{\tau-} dZ_\tau,$$

*gdzie całka z prawej strony równości oznacza całkę stochastyczną typu Itô względem $\mathbb{F}$–semimartyngału.*

**Lemat 3.7** *Niech $g$ oraz $Z$ będą procesami RV–càdlàg. Jeżeli $g$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem, $Z$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, $Z_0 = 0$, natomiast $\alpha, \beta$, $0 < \alpha < \beta < 1$, są $\mathbb{F}$–czasami zatrzymania, to dla całki stochastycznej typu forward zachodzą zależności:*

*(i)* $$\int_{(0,\alpha]} g d^- Z = \int_{(0,1]} g \, \mathbb{1}_{[0,\alpha)} d^- Z = \int_{(0,1]} g_{\tau-} \, \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(\tau) dZ_\tau,$$

*(ii)* $$\int_{(\alpha,\beta]} g d^- Z = \int_{(0,1]} g \, \mathbb{1}_{[\alpha,\beta)} d^- Z = \int_{(0,1]} g_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]}(\tau) dZ_\tau,$$

*(iii)* $$\int_{(\alpha,1]} g d^- Z = \int_{(0,1]} g \, \mathbb{1}_{[\alpha,1]} d^- Z = \int_{(0,1]} g_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,1]}(\tau) dZ_\tau,$$

*gdzie ostatnia z całek w powyższych równościach oznacza całkę stochastyczną typu Itô względem $\mathbb{F}$–semimartyngału.*

**Dowód.** Zauważmy, że dla $\mathbb{F}$–czasu zatrzymania $\alpha \in (0, 1)$ otrzymujemy

$$(g \, \mathbb{1}_{[0,\alpha)})_{\tau-} = g_{\tau-} \, \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(\tau).$$

Ponieważ procesy po lewej stronie powyższej równości są procesami RV–càdlàg, więc korzystając z Lematu 3.6 dostajemy, że

$$\begin{aligned} &\int_{(0,\alpha]} g_{\tau-} dZ_\tau = \int_{[0,\alpha]} g_{\tau-} dZ_\tau - g_0 \, Z_0 = \int_{[0,1]} g_{\tau-} \, \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(\tau) dZ_\tau \\ &= \int_{[0,1]} (g \, \mathbb{1}_{[0,\alpha)})_{\tau-} dZ_\tau = \int_{(0,1]} (g \, \mathbb{1}_{[0,\alpha)})_{\tau-} dZ_\tau = \int_{(0,1]} g \, \mathbb{1}_{[0,\alpha)} d^- Z. \end{aligned}$$

Zależności (ii) oraz (iii) wynikają z powyższej równości oraz z Lematu 3.5(i). ■

**Definicja 3.8** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Rozważmy na przestrzeni $\Omega$ dwie filtracje: $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ oraz $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\in I}$ spełniające warunki (i) oraz (ii) ze strony 2 rozprawy.
Proces càdlàg $x$ nazywamy $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym, jeżeli $x$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem na przedziale $[0, 1]$, natomiast $\tilde{x}$ jest $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem na przedziale $[0, 1]$.
Proces càdlàg $x$ jest $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem, jeżeli $x$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem na przedziale $[0, 1]$, natomiast $\tilde{x}$ jest $\mathbb{H}$–semimartyngałem na przedziale $[0, 1)$, ([21]).

**Definicja 3.9** ([33]) Niech $g$ będzie $\mathbb{F}$–przewidywalnym procesem, $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem, $Z_0 = 0$. Dla $0 \le a < b \le 1$ całki typu Itô $\int_{[0,1]} g_\tau 1\!\!\mathrm{I}_{[0,a)}(\tau)dZ_\tau$ oraz $\int_{[0,1]} g_\tau 1\!\!\mathrm{I}_{[a,b)}(\tau)dZ_\tau$ określamy następująco

(i) $\quad \int_{[0,1]} g_\tau\ 1\!\!\mathrm{I}_{[0,a)}(\tau)dZ_\tau = \lim_{s\uparrow a}(\int_{[0,1]} g_\tau\ 1\!\!\mathrm{I}_{[0,s]}(\tau)dZ_\tau),$

(ii) $\quad \int_{[0,1]} g_\tau\ 1\!\!\mathrm{I}_{[a,b)}(\tau)dZ_\tau = \int_{[0,1]} g_\tau\ 1\!\!\mathrm{I}_{[0,b)}(\tau)dZ_\tau - \int_{[0,1]} g_\tau\ 1\!\!\mathrm{I}_{[0,a)}(\tau)dZ_\tau.$

**Lemat 3.10** *Jeżeli $g$ jest $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym procesem RV–càdlàg, $Z$ jest $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem, $Z_0 = 0$, to dla dowolnych $0 \le a < b \le 1$ zachodzą zależności*

*(i)* $\quad \int_{(0,a]} gd^+Z = -\int_{(0,1]} \tilde{g}\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{[1-a,1)}d^-\tilde{Z} = -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-}\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{[1-a,1)}(\tau)d\tilde{Z}_\tau,$

*(ii)* $\quad \int_{(a,b]} gd^+Z = -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-}\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{[1-b,1-a)}(\tau)d\tilde{Z}_\tau,$

*(iii)* $\quad \int_{[a,1)} gd^+Z = -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-}\cdot 1\!\!\mathrm{I}_{[0,1-a]}(\tau)d\tilde{Z}_\tau,$

*gdzie całki po prawej stronie powyższych równości są całkami stochastycznymi typu Itô względem $\mathbb{F}$–semimartyngału.*

**Dowód.** (i) Stosując kolejno Lemat 3.5(iv),(iii), Definicję 3.3 oraz Lemat 3.6 dostajemy

$$J = \int_{(0,a]} g d^+ Z = -\int_{[1-a,1)} \tilde{g} d^- \tilde{Z} = -(\int_{(0,1)} \tilde{g} d^- \tilde{Z} - \int_{(0,1-a)} \tilde{g} d^- \tilde{Z})$$
$$= -(\lim_{s\uparrow 1}(\int_{(0,s]} \tilde{g} d^- \tilde{Z}) - \lim_{\rho\uparrow 1-a}(\int_{(0,\rho]} \tilde{g} d^- \tilde{Z}))$$
$$= -(\lim_{s\uparrow 1}(\int_{(0,s]} \tilde{g}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau) - \lim_{\rho\uparrow 1-a}(\int_{(0,\rho]} \tilde{g}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau)).$$

Z własności granicy i definicji całki typu Itô po przedziale $(\rho, s]$ otrzymujemy

$$J = -\lim_{s\uparrow 1} \lim_{\rho\uparrow 1-a}(\int_{(0,s]} \tilde{g}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau - \int_{(0,\rho]} \tilde{g}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau)) = -\lim_{s\uparrow 1} \lim_{\rho\uparrow 1-a}(\int_{(\rho,s]} \tilde{g}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau).$$

Korzystając teraz z własności przechodzenia z funkcją charakterystyczną pod znak całki typu Itô oraz z Twierdzenia o Zbieżności Zmajoryzowanej, (Twierdzenie 1.15), dostajemy

$$J = -\lim_{s\uparrow 1} \lim_{\rho\uparrow 1-a}(\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-} \cdot \mathbb{I}_{(\rho,s]}(\tau) d\tilde{Z}_\tau) = -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-} \cdot \mathbb{I}_{[1-a,1)}(\tau) d\tilde{Z}_\tau.$$

(ii) Korzystając z Lematu 3.5(i) i udowodnionej już równości (i) otrzymujemy

$$J = \int_{(a,b]} g d^+ Z = \int_{(0,b]} g d^+ Z - \int_{(0,a]} g d^+ Z$$
$$= -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-} \cdot \mathbb{I}_{[1-b,1)}(\tau) d\tilde{Z}_\tau + \int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-} \cdot \mathbb{I}_{[1-a,1)}(\tau) d\tilde{Z}_\tau.$$

Stosując teraz Definicję 3.9(ii) oraz Twierdzenie o Zbieżności Zmajoryzowanej, (Twierdzenie 1.15), dostajemy

$$J = -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-} \cdot \mathbb{I}_{[1-b,1-a)}(\tau) d\tilde{Z}_\tau.$$

(iii) Korzystając z Lematów 3.5(iv) oraz 3.7(i) otrzymujemy

$$\int_{[a,1)} g d^+ Z = -\int_{(0,1-a]} \tilde{g} d\tilde{Z} = -\int_{(0,1]} \tilde{g}_{\tau-} \cdot \mathbb{I}_{[0,1-a]}(\tau) d\tilde{Z}_\tau.$$

■

## 3.2 Wielowartościowa całka stochastyczna typu Stratonowicza

Niech $I$, tak jak poprzednio, oznacza przedział domknięty $[0,1]$.

**Definicja 3.11** Dla wielowartościowego procesu stochastycznego càdlàg $G$ symbolem

$$\tilde{G}_t = (G_t)^{\sim} = G_{(1-t)-} = \lim_{s\uparrow 1-t} G_s,$$

oznaczamy wielowartościowy proces z czasem odwróconym. Granica wielowartościowych odwzorowań jest określana względem metryki Hausdorffa.

**Definicja 3.12** Wielowartościowy proces stochastyczny càdlàg $G$ jest $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym procesem, jeżeli $G$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem na przedziale $[0,1]$ oraz $\tilde{G}$ jest $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem na przedziale $[0,1]$.
Wielowartościowy proces stochastyczny $G$ jest procesem RV–càdlàg (RV–càglàd), jeżeli jest procesem càdlàg (càglàd) i jest ciągły dla $t=0$ i $t=1$ względem metryki Hausdorffa.
Wielowartościowy proces $G$ jest całkowo ograniczony, jeżeli istnieje taki rzeczywisty proces $m$ będący $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym procesem RV–càdlàg, że $\|m\|_{S^\infty} < \infty$ oraz dla dowolnych $t \in I$, $H(G_t,\{0\}) \leq m_t$.

W dalszej części rozdziału zakładamy, że $G$ jest wielowartościowym procesem o wartościach w przestrzeni $comp\,conv(\mathbb{R}^n)$.

**Twierdzenie 3.13** *Jeżeli $G$ jest $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym procesem wielowartościowym, to istnieje $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalny selektor $g$ z procesu $G$.*

**Dowód.** Dla niepustego zwartego i wypukłego zbioru $B$ zawartego w $\mathbb{R}^n$ definiujemy jego punkt Steinera jako

$$\mathbf{s}(B) = 1/2\,(\sigma(B,+1) - \sigma(B,-1)) \ \text{ dla } n=1,$$
$$\text{oraz} \quad \mathbf{s}(B) = n \int_{S^{n-1}} p\,\sigma(B,p)\,\mu(dp) \ \text{ dla } n \geq 2,$$

gdzie $\sigma(B,p) := \sup_{a\in B} < a,p >$ oznacza funkcję podpierającą zbioru $B$, $S^{n-1}$ jest sferą jednostkową w $\mathbb{R}^n$, natomiast $\mu$ jest zwykłą miarą probabilistyczną na sferze $S^{n-1}$, ([4]).
Korzystając z własności punktu Steinera otrzymujemy, że $\mathbf{s}(B) \in B$. Ponadto, $\mathbf{s} : comp\,conv(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem Lipschitza względem metryki Hausdorffa. Dla dowolnych $(t,\omega) \in I \times \Omega$ określamy

$$g(t,\omega) = \mathbf{s}(G(t,\omega)).$$

Z własności odwzorowania $\mathbf{s}$ wynika, że $g$ jest selektorem procesu wielowartościowego $G$. Proces $g$ jest procesem càdlàg oraz $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem jako superpozycja odwzorowania Lipschitza i $\mathbb{F}$–adaptowalnego procesu wielowartościowego typu càdlàg. Należy jeszcze pokazać, że proces z czasem odwróconym $\tilde{g}$ jest $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem i jest selektorem procesu $\tilde{G}$. Ponieważ $g(t,\omega) = \mathbf{s}(G(t,\omega))$, stąd też $\tilde{g}(t,\omega) = (\mathbf{s}(G(t,\omega)))^{\sim}$. Z drugiej strony otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t,\omega) = g((1-t)-,\omega) &= n \int_{S^{n-1}} p \sup_{a\in G((1-t)-,\omega)} < a,p > \ \mu(dp)\\ &= n \int_{S^{n-1}} p\, \sigma(G((1-t)-,\omega),p)\, \mu(dp)\\ &= n \int_{S^{n-1}} p\, \sigma(\tilde{G}(t,\omega),\omega),p)\, \mu(dp) = \mathbf{s}(\tilde{G}(t,\omega)).\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że $\tilde{g}(t,\omega) = (\mathbf{s}(G(t,\omega)))^{\sim} = \mathbf{s}(\tilde{G}(t,\omega))$, a to oznacza, że $\tilde{g}$ jest selektorem procesu wielowartościowego $\tilde{G}$.
Ponieważ $\tilde{G}$ jest $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem, stąd $\tilde{g}$ jest także $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem. W ten sposób proces $g$ jest poszukiwanym $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym selektorem procesu $G$. ■

**Uwaga 3.14** Jeżeli w Twierdzeniu 3.13 dodatkowo założymy, że trajektorie procesu $G$ są lewostronnie ciągłe w $t = 1$, to selekcja $g$ otrzymana w Twierdzeniu 3.13 jest procesem RV–càdlàg.

**Definicja 3.15** Niech $G$ będzie wielowartościowym $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym procesem RV–càdlàg, $Z$ niech będzie $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem, $Z_0 = 0$.

Niech $\mathcal{S}(G)$ oznacza rodzinę wszystkich $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnych procesów RV–càdlàg będących selektorami procesu $G$. Dla dowolnych $0 \le a < b \le 1$ wielowartościową całkę typu Stratonowicza określamy jako zbiór

$$\int_{(a,b]} G \circ dZ = \{1/2\,(\int_{(a,b]} g d^- Z + \int_{(a,b]} g d^+ Z) \; : \; g \in \mathcal{S}(G)\}$$
$$= \{1/2\,(\int_{(a,b]} g_{\tau-} dZ_\tau - \int_{[1-b,1-a)} \tilde{g}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau) \; : \; g \in \mathcal{S}(G)\}.$$

Dla udogodnienia wprowadzamy następujące oznaczenie

$$\int_{(a,b]} (g,h) \circ dZ := 1/2\,(\int_{(a,b]} g_{\tau-} dZ_\tau - \int_{[1-b,1-a)} \tilde{h}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau).$$

**Uwaga 3.16** Korzystając z Twierdzenia 3.13 wnioskujemy, że zbiór $\mathcal{S}(G)$ jest zbiorem niepustym, zatem wielowartościowa całka w powyższej definicji istnieje i jest zbiorem niepustym.

**Twierdzenie 3.17** *Niech $Z$ będzie $\mathbb{F}$–semimartyngałem należącym do przestrzeni $\underline{H}^2$, $Z_0 = 0$. Niech $G$ będzie całkowo ograniczonym przez proces $m$ wielowartościowym $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem RV–càdlàg. Jeżeli dla dowolnych $0 \le a < b \le 1$ proces $x$ spełnia zależność*

$$x_b - x_a \in cl_{L^2} \int_{(a,b]} G d^- Z,$$

*to dla dowolnych $\epsilon > 0$ oraz $\mathbb{F}$–czasów zatrzymania $0 \le \alpha < \beta \le 1$ istnieje RV–càdlàg i $\mathbb{F}$–adaptowalny selektor $g^{\alpha,\beta,\epsilon}$ procesu $G$ spełniający warunek*

$$\|x_\beta - x_\alpha - \int_{(\alpha,\beta]} g^{\alpha,\beta,\epsilon} d^- Z\|_{L^2} < \epsilon.$$

**Dowód.** Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots$ oraz dowolnego $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ definiujemy zmienne losowe $\alpha_n$ i $\beta_n$ wzorami

$$\alpha_n(\omega) = \begin{cases} k\,2^{-n} & \text{dla} \;\; \omega \in \{\omega : (k-1)\,2^{-n} \le \alpha(\omega) < k\,2^{-n}\} \\ 1 & \text{dla} \;\; \omega \in \{\omega : \alpha(\omega) = 1\} \end{cases},$$

$$\beta_n(\omega) = \begin{cases} k\,2^{-n} & \text{dla} \;\; \omega \in \{\omega : (k-1)\,2^{-n} \le \beta(\omega) < k\,2^{-n}\} \\ 1 & \text{dla} \;\; \omega \in \{\omega : \beta(\omega) = 1\} \end{cases}.$$

Dla dowolnych $n = 1, 2, \ldots$ oraz $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ określamy zbiory

$$A_k^n = \{\omega : \alpha(\omega) \geq k\, 2^{-n}\}\ ;\ \ B_k^n = \{\omega : \beta(\omega) \geq k\, 2^{-n}\}.$$

Mamy wtedy

$$(0, \alpha_n] = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \{(k\, 2^{-n}, (k+1)\, 2^{-n}]\} \times A_k^n,$$
$$(0, \beta_n] = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \{(k\, 2^{-n}, (k+1)\, 2^{-n}]\} \times B_k^n.$$

Ponadto, dla dowolnych $n = 1, 2, \ldots$ otrzymujemy

$$x_{\alpha_n} = x_0 + \sum_{k=0}^{2^n-1} (x_{(k+1)\, 2^{-n}} - x_{k\, 2^{-n}})\ \mathbb{I}_{A_k^n},$$
$$x_{\beta_n} = x_0 + \sum_{k=0}^{2^n-1} (x_{(k+1)\, 2^{-n}} - x_{k\, 2^{-n}})\ \mathbb{I}_{B_k^n}.$$

Z uwagi na to, że $A_k^n \subset B_k^n$, mamy zależność

$$x_{\beta_n} - x_{\alpha_n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} (x_{(k+1)\, 2^{-n}} - x_{k\, 2^{-n}})\ \mathbb{I}_{B_k^n \setminus A_k^n}.$$

Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ oraz $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ można wybrać RV–càdlàg i $\mathbb{F}$–adaptowalny selektor $g^{n,k}$ procesu $G$ spełniający zależność

$$\|x_{(k+1)\, 2^{-n}} - x_{k\, 2^{-n}} - \int_{(k\, 2^{-n}, (k+1)\, 2^{-n}]} g_{\tau-}^{n,k} dZ_\tau\|_{L^2} < \epsilon/3 \cdot 2^{-k}. \tag{3.1}$$

Określamy proces $g^n$ następująco

$$g^n = g^{n,2^n-1}\ \mathbb{I}_{[0,\alpha_n)} + g^{n,2^n-1}\ \mathbb{I}_{[\beta_n,1]} + \sum_{k=1}^{2^n-1} g^{n,k}\ \mathbb{I}_{[k\, 2^{-n}, (k+1)\, 2^{-n}) \times B_k^n \setminus A_k^n}.$$

Otrzymany proces $g^n$ jest skończoną sumą procesów RV–càdlàg, dlatego też jest procesem càdlàg na przedziale $I$. Z uwagi na to, że $g^{n,2^n-1}$ oraz $\mathbb{I}_{[\beta_n,1]}$ są procesami RV–càdlàg, więc proces $g^n$ jest procesem lewostronnie ciągłym dla $t = 1$. Zatem jest on procesem RV–càdlàg, $\mathbb{F}$–adaptowalnym oraz jest selektorem procesu $G$.

Ponadto mamy zależność

$$\int_{(\alpha_n,\beta_n]} g^n_{\tau-} dZ_\tau = \sum_{k=1}^{2^n-1} \mathbb{1}_{B^n_k \setminus A^n_k} \Big(\int_{(0,1]} g^{n,k}_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(k\,2^{-n},(k+1)\,2^{-n}]}(\tau) dZ_\tau\Big).$$

Stosując kolejno własność różnicy całek typu Itô, własność przechodzenia z funkcją charakterystyczną pod znak całki typu Itô, całkową ograniczoność procesu $G$ oraz Twierdzenie 1.14 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\| \int_{(\alpha,\beta]} g^n_{\tau-} dZ_\tau - \int_{(\alpha_n,\beta_n]} g^n_{\tau-} dZ_\tau \|_{L^2} = \| \int_{(\alpha,\beta]\oplus(\alpha_n,\beta_n]} g^n_{\tau-} dZ_\tau \|_{L^2} \\
&\quad = \| \int_{(0,1]} g^n_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]\oplus(\alpha_n,\beta_n]} \, dZ_\tau \|_{L^2} \le \| \int_{(0,1]} m_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]\oplus(\alpha_n,\beta_n]} \, dZ_\tau \|_{L^2} \\
&\quad \le (E \sup_{t\in I} | \int_{(0,1]} m_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]\oplus(\alpha_n,\beta_n]} \, dZ_\tau |^2)^{1/2} \\
&\quad \le \sqrt{8} \cdot \| \int_{(0,\cdot]} m_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]\oplus(\alpha_n,\beta_n]} \, dZ_\tau \|_{\underline{H}^2},
\end{aligned}$$

gdzie $B \oplus D$ oznacza zbiór postaci $(B \setminus D) \cup (D \setminus B)$.
Stosując powyższe oszacowanie dostajemy

$$\begin{aligned}
&\|x_\beta - x_\alpha - \int_{(\alpha,\beta]} g^n_{\tau-} dZ_\tau \|_{L^2} \\
&\quad \le \|x_\beta - x_\alpha - (x_{\beta_n} - x_{\alpha_n})\|_{L^2} + \|x_{\beta_n} - x_{\alpha_n} - \int_{(\alpha_n,\beta_n]} g^n_{\tau-} dZ_\tau \|_{L^2} \\
&\quad + \sqrt{8} \, \| \int_{(0,\cdot]} m_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]\oplus(\alpha_n,\beta_n]} \, dZ_\tau \|_{\underline{H}^2} = J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Proces $x$ oraz całka stochastyczna typu Itô są procesami càdlàg, $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, gdy $n \to \infty$, więc istnieje takie $n_0$, że dla dowolnych $n > n_0$ składniki $J_1$ oraz $J_3$ będą mniejsze niż $\epsilon/3$.
Z nierówności (3.1) wynika, że

$$\begin{aligned}
J_2 &= \|x_{\beta_n} - x_{\alpha_n} - \int_{(\alpha_n,\beta_n]} g^n_{\tau-} dZ_\tau \|_{L^2} \\
&\le \sum_{k=0}^{2^n-1} (\mathbb{1}_{B^n_k \setminus A^n_k}(\omega) \, \|x_{(k+1)\,2^{-n}} - x_{k\,2^{-n}} - \int_{(0,1]} g^{n,k}_{\tau-} \, \mathbb{1}_{(k\,2^{-n},(k+1)\,2^{-n}]}(\tau) dZ_\tau \|_{L^2}) \\
&< \sum_{k=0}^{2^n-1} (2^{-k} \, \epsilon/3) < \epsilon/3.
\end{aligned}$$

Biorąc teraz dowolne $n > n_0$ oraz $g^{\alpha,\beta,\epsilon} = g^n$ otrzymujemy, że

$$\|x_\beta - x_\alpha - \int_{(\alpha,\beta]} g^{\alpha,\beta,\epsilon} d^- Z\|_{L^2} = \|x_\beta - x_\alpha - \int_{(\alpha,\beta]} g^n_{\tau-} dZ_\tau\|_{L^2} < \epsilon,$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

**Definicja 3.18** Niech $Z$ będzie procesem RV–càdlàg. Niech $x$ będzie takim procesem stochastycznym, że dla dowolnych $0 \leq a < b \leq 1$ istnieją procesy stochastyczne RV–càdlàg $g^{a,b}$ oraz $h^{a,b}$, które spełniają zależność

$$x_b - x_a = \int_{(a,b]} g^{a,b} d^- Z + \int_{(a,b]} h^{a,b} d^+ Z.$$

Proces $x$ nazywamy całkowo dekomponowalnym, jeżeli istnieją procesy RV–càdlàg $u, v$ takie, że $u_0 \in \mathcal{F}_0$, $v_1 \in \mathcal{H}_0$ oraz zachodzą zależności

(i) dla dowolnych $0 \leq a < b \leq 1$,
$u_b - u_a = \int_{(a,b]} g^{a,b} d^- Z, \quad v_b - v_a = \int_{(a,b]} h^{a,b} d^+ Z,$

(ii) $x = u + v$.

**Twierdzenie 3.19** *Niech $Z$ będzie $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem należącym do przestrzeni $\underline{H}^2$, $Z_0 = 0$. Niech $G$ będzie całkowo ograniczonym przez proces $m$ wielowartościowym $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym procesem, lewostronnie ciągłym w punkcie $t = 1$. Jeżeli dla całkowo dekomponowalnego procesu RV–càdlàg $x$ zachodzi zależność*

$$x_b - x_a \in \int_{(a,b]} G \circ dZ,$$

*dla dowolnych $0 \leq a < b \leq 1$, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje taka para procesów RV–càdlàg $(g, h)$, będących selektorami procesu wielowartościowego $G$, że*

$$\sup_{t \in I} \|x_t - x_0 - \int_{(0,t]} (g, h) \circ dZ\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

**Dowód.** Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Z założenia, że $Z$ jest $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem wynika, że $Z$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem oraz $\tilde{Z}$ jest $\mathbb{H}$–semimartyngałem. Korzystając z Fundamentalnego Twierdzenia dla Lokalnych Martyngałów, (Twierdzenie 1.13), każdy $\mathbb{F}$–semimartyngał $Z$ jest rozkładalny na sumę

$Z = N^1 + A^1$ w taki sposób, że skoki lokalnego $\mathbb{F}$–martyngału $N^1$ mogą być ograniczone przez stałą $\epsilon\,(6\,c_2\,\|m\|_{S^\infty})^{-1}$. W podobny sposób dla $\mathbb{H}$–semimartyngału $\tilde{Z}$ skoki lokalnego $\mathbb{H}$–martyngału $\tilde{N}^2$ z rozkładu $\tilde{Z} = \tilde{N}^2 + \tilde{A}^2$ można ograniczyć przez $\epsilon\,(12\,c_2\,\|\tilde{m}\|_{S^\infty})^{-1}$.

Ponieważ $x_b - x_a \in \int_{(a,b]} G \circ dZ$ dla dowolnych $0 \le a < b \le 1$, więc istnieją RV–càdlàg i $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalne selektory $g^{a,b}$ z $G$ takie, że

$$x_b - x_a = 1/2\,(\int_{(a,b]} g^{a,b} d^- Z + \int_{(a,b]} g^{a,b} d^+ Z).$$

Korzystając z całkowej dekomponowalności procesu $x$ wnioskujemy, że istnieją procesy $u$ oraz $v$ takie, że $x = u + v$ oraz dla dowolnych $0 \le a < b \le 1$

$$u_b - u_a = 1/2 \int_{(a,b]} g^{a,b} d^- Z, \qquad v_b - v_a = 1/2 \int_{(a,b]} g^{a,b} d^+ Z.$$

Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych w następujący sposób

$$\begin{aligned}
&T_0 = 0,\\
&T_{k+1} = \inf\{t \ge T_k : (\int_{(T_k,t]} d[N^1,N^1]_\tau)^{1/2} + \int_{(T_k,t]} |dA^1_\tau| \ge \epsilon\,(6\,c_2\,\|m\|_{S^\infty})^{-1}\\
&\qquad\qquad \text{lub } |u_t - u_{T_k}| > \epsilon/6\},\\
&S_0 = 0,\\
&S_{k+1} = \inf\{s \ge S_k : (\int_{(S_k,s]} d[\tilde{N}^2,\tilde{N}^2]_\tau)^{1/2} + \int_{(S_k,s]} |d\tilde{A}^2_\tau| \ge \epsilon\,(12\,c_2\,\|\tilde{m}\|_{S^\infty})^{-1}\\
&\qquad\qquad \text{lub } |\tilde{v}_s - \tilde{v}_{S_k}| > \epsilon/12\}.
\end{aligned}$$

Proces $Z$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, natomiast z określenia procesu $u$ wynika, że jest on $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem oraz $u_0 \in \mathcal{F}_0$. Otrzymujemy więc, że ciąg $\{T_k\}_{k\ge 0}$ jest ciągiem $\mathbb{F}$–czasów zatrzymania rosnących do 1, ([33]).

Korzystając ze Lematu 3.10 otrzymujemy, że

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_s = v_{(1-t)-} - v_{(1-s)-} = -\int_{[1-t,1-s)} g^{1-s,1-t} d^+ Z = \int_{(s,t]} \tilde{g}^{1-s,1-t}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau. \tag{3.2}$$

Ponieważ $\tilde{g}^{1-s,1-t}$ jest $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem, $\tilde{Z}$ jest $\mathbb{H}$–semimartyngałem oraz $\tilde{v}_0 = v_1 \in \mathcal{H}_0$, więc ciąg $\{S_l\}_{l\ge 0}$ jest ciągiem $\mathbb{H}$–czasów zatrzymania, który rośnie do 1.

Z Twierdzenia 3.17 wynika, że dla dowolnych $k = 1, 2, \dots$ istnieją takie selektory $g^k$ z $G$, będące $\mathbb{F}$–adaptowalnymi procesami RV–càdlàg, że

$$\|u_{T_k} - u_{T_{k-1}} - 1/2 \int_{(T_{k-1},T_k]} g^k_{\tau-} dZ_\tau\|_{L^2} < \epsilon/6 \cdot 2^{-k}.$$

W podobny sposób dla dowolnych $l = 1, 2, \dots$ możemy wybrać takie selektory $\tilde{h}^l$ z $\tilde{G}$, bedące $\mathbb{H}$–adaptowalnymi procesami RV–càdlàg, że

$$\|\tilde{v}_{S_l} - \tilde{v}_{S_{l-1}} - 1/2 \int_{(S_{l-1},S_l]} \tilde{h}^l_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau\|_{L^2} < \epsilon/12 \cdot 2^{-l}.$$

Zdefiniujmy teraz procesy

$$g = \sum_{k\geq 1} g^k\, \mathbb{I}_{[T_{k-1},T_k)} + (\sum_{k\geq 1} g^k \cdot \mathbb{I}_{[T_{k-1},T_k)})_{1-}\, \mathbb{I}_{\{1\}},$$

$$\tilde{h} = \sum_{l\geq 1} \tilde{h}^l\, \mathbb{I}_{[S_{l-1},S_l)} + (\sum_{l\geq 1} \tilde{h}^l\, \mathbb{I}_{[S_{l-1},S_l)})_{1-}\, \mathbb{I}_{\{1\}}.$$

Zauważmy, że $g$ oraz $h$ są procesami RV–càdlàg. Ponadto $g_t$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalnym procesem, podczas gdy $h_t = (\tilde{h}_t)^\sim$ jest $\mathcal{H}_{1-t}$-mierzalnym procesem. Korzystając z Lematu 3.6 dostajemy, że

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<t\leq 1} \|x_t - x_0 - \int_{(0,t]} (g,h) \circ dZ\|_{L^2} \\
&\quad = \sup_{0<t\leq 1} \|(u_t - u_0) + (v_t - v_0) - 1/2 \int_{(0,t]} g d^- Z - 1/2 \int_{(0,t]} h d^+ Z\|_{L^2} \\
&\quad \leq \sup_{0<t\leq 1} \|(u_t - u_0) - 1/2 \int_{(0,t]} g_{\tau-} dZ_\tau\|_{L^2} \\
&\quad + \sup_{0<t\leq 1} \|(v_t - v_0) - 1/2 \int_{(0,t]} h d^+ Z\|_{L^2} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Rozważmy powyższe składniki oddzielnie.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sup_{k\geq 1} \sup_{T_{k-1}\leq t<T_k} \|(u_t - u_0) - 1/2 \int_{(0,t]} g_{\tau-} dZ_\tau\|_{L^2} \\
&\leq \sup_{k\geq 1} \sup_{T_{k-1}\leq t<T_k} \|u_t - u_{T_{k-1}}\|_{L^2} + \sup_{k\geq 1} \sup_{T_{k-1}\leq t<T_k} \| \int_{(T_{k-1},t]} g_{\tau-} dZ_\tau\|_{L^2} \\
&+ \sup_{k\geq 2} \| \sum_{i=1}^{k-1} (u_{T_i} - u_{T_{i-1}} - 1/2 \int_{(T_{i-1},T_i]} g_{\tau-} dZ_\tau)\|_{L^2} = J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Z określenia czasu zatrzymania $T_k$ otrzymujemy, że dla dowolnych $k = 1, 2, \ldots$ oraz prawie wszystkich $\omega \in \Omega$, $J_1 < \epsilon/6$. Z kolei

$$\begin{aligned} J_2 &\le \| \int_{(0,\cdot]} g_{\tau-}\ \mathbb{1}_{(T_{k-1},t]}(\tau) dZ_\tau \|_{S^2} \le c_2 \| \int_{(0,\cdot]} g_{\tau-}\ \mathbb{1}_{(T_{k-1},t]}(\tau) dZ_\tau \|_{\underline{H}^2} \\ &\le c_2 \| \int_{(0,\cdot]} m_{\tau-}\ \mathbb{1}_{(T_{k-1},t]}(\tau) dZ_\tau \|_{\underline{H}^2} \le c_2 \|m\|_{S^\infty} \cdot \| \int_{(0,\cdot]} \mathbb{1}_{(T_{k-1},t]}(\tau) dZ_\tau \|_{\underline{H}^2} \\ &\le c_2 \|m\|_{S^\infty} \cdot \|( \int_{(T_{k-1},t]} d[N^1, N^1]_\tau)^{1/2} + \int_{(T_{k-1},t]} |dA^1_\tau| \|_{L^2} < \epsilon/6. \end{aligned}$$

$$J_3 \le \sum_{i=1}^{\infty} \|u_{T_i} - u_{T_{i-1}} - 1/2 \int_{(T_{i-1},T_i]} g_{\tau-} dZ_\tau \|_{L^2} < \epsilon/6 \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \epsilon/6,$$

co wynika z faktu, że $g_{\tau-} = g^k_{\tau-}$ na przedziale $(T_{k-1}, T_k]$. W ten sposób dostajemy, że $I_1 \le \epsilon/2$.

Rozważmy teraz składnik $I_2$.

Oznaczmy przez $y := (\tilde{v} - \tilde{v}_0 - 1/2 \int_{(0,\cdot]} \tilde{h}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau)$. Stosując dla $\mathbb{H}$–czasu zatrzymania $S_l$, $l = 1, 2, \ldots$ to samo rozumowanie, co w przypadku składnika $I_1$, otrzymujemy

$$\sup_{0<t\le1} \|y_t\|_{L^2} = \sup_{0<t\le1} \|\tilde{v}_t - \tilde{v}_0 - 1/2 \int_{(0,t]} \tilde{h}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau \|_{L^2} < \epsilon/4. \tag{3.3}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} I_2 &= \sup_{0<t\le1} \|(v_t - v_0) - 1/2 \int_{(0,t]} h d^+ Z \|_{L^2} \\ &= \sup_{0<t\le1} \|\tilde{v}_{1-} - \tilde{v}_{(1-t)-} - 1/2 \int_{[1-t,1)} \tilde{h}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau \|_{L^2} \\ &\le \|\tilde{v}_{1-} - \tilde{v}_0 - 1/2\, ( \int_{(0,\cdot]} \tilde{h}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau)_{1-} \|_{L^2} \\ &+ \sup_{0<t\le1} \|\tilde{v}_{(1-t)-} - \tilde{v}_0 - 1/2\, ( \int_{(0,\cdot]} \tilde{h}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau)_{(1-t)-} \|_{L^2} \\ &= \|y_{1-}\|_{L^2} + \sup_{0<t\le1} \|y_{(1-t)-}\|_{L^2} \le 2 \sup_{0<t\le1} \|y_{(1-t)-}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wybierzmy dowolne $t \in (0, 1]$ oraz dowolny ciąg $\{t_n\}$, $t_n \uparrow t$, $n \to \infty$. Otrzymamy wtedy, że $y_{t-}(\omega) = \lim_{t_n \uparrow t} y_{t_n}(\omega)$, co oznacza, że $y_{t_n}$ zbiega punktowo do $y_{t-}$. Ponieważ dla dowolnych $t_n$, $y_{t_n}$ jest całkowo ograniczone przez $\epsilon/4$, więc korzystając z Twierdzenia o Zmajoryzowanej Zbieżności, (Twierdzenie 1.15), dostajemy dla dowolnych $t \in (0,1]$

$$\|y_{t-}\|_{L^2} = \lim_{t_n \uparrow t} \|y_{t_n}\|_{L^2} < \epsilon/4. \tag{3.5}$$

Z uwagi na to, że $y_{0-} = y_0$, a także uwzględniając nierówności (3.4), (3.3) oraz (3.5) otrzymamy

$$I_2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq 1} \|y_{(1-t)-}\|_{L^2} = 2 \sup_{0\leq s\leq 1} \|y_{s-}\|_{L^2} = 2 \sup_{0\leq s\leq 1} \lim_{t_n \uparrow s} \|y_{t_n}\|_{L^2} < \epsilon/2.$$

Zatem

$$\sup_{0<t\leq 1} \|x_t - x_0 - \int_{(0,t]} (g,h) \circ dZ\|_{L^2} \leq I_1 + I_2 < \epsilon,$$

co kończy dowód twierdzenia. ∎

# Rozdział 4

# Własności zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznych

W rozdziale tym przedstawione zostaną pewne zastosowania uzyskanych wcześniej wyników do teorii inkluzji stochastycznych.

W pierwszej części rozdziału pokażemy, jak twierdzenie o przechodzeniu z odległością Hausdorffa pod znak całki stochastycznej, (Twierdzenie 2.11), można wykorzystać do badania własności inkluzji stochastycznej typu Itô względem $\mathbb{F}$–semimartyngału. Pierwszy z przedstawionych wyników, (Twierdzenie 4.3), pokazuje niepustość zbioru rozwiązań takiej inkluzji przy założeniu warunku Lipschitza dla multifunkcji $F$ oraz $S^2$-całkowej ograniczoności dla procesu $F(x)$. Pokazana zostanie także ograniczoność zbioru rozwiązań tej inkluzji, (Twierdzenie 4.4).

Druga część rozdziału jest konsekwencją tez zawartych w rozdziale trzecim. Pokazany tu zostanie stochastyczny odpowiednik Lematu o Reprezentacji Całkowej, znanego w teorii inkluzji deterministycznych, ([3] Lemat 2.1.1). Dla całki Aumanna twierdzenie selekcyjne zostało po raz pierwszy udowodnione przez A. Fryszkowskiego w pracy [15]. M. Kisielewicz w pracy [22] badał tę własność dla wielowartościowej całki typu Itô względem procesu Wienera i Poissona, natomiast J. Motyl w pracy [30] uzyskał podobny wynik dla wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô względem semimartyngału. Twierdzenie 4.5 ma podobny charakter, ale dotyczy wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza zdefiniowanej w rozdziale trzecim. Jego dowód nawiązuje do idei zawartej w pracy [30], przy wykorzystaniu definicji i własności zamieszczonych w rozdziałach drugim oraz trzecim.

W końcowej części rozdziału pokazano w jaki sposób otrzymany rezultat może być pomocny w badaniu własności inkluzji stochastycznej typu Stratonowicza.

Niech $I = [0, T]$ będzie domkniętym przedziałem w $\mathbb{R}_+$. Niech dana będzie zupełna przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Niech $Z \in \underline{H}^\infty$, $Z_0 = 0$, natomiast $F : I \times \mathbb{R}^n \to cl\,conv(\mathbb{R}^n)$ będzie multifunkcją mierzalną względem $\sigma$–algebry borelowskiej na $I \times \mathbb{R}^n$.

Symbolem $L^2(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ oznaczamy przestrzeń procesów stochastycznych o wartościach w $\mathbb{R}^n$, z normą $\|x\|_{L^2(I\times\Omega;\mathbb{R}^n)} = (E\int_0^T |x_t|^2 dt)^{1/2}$.

$S^2(I; L^2)$ oznaczać będzie przestrzeń $\mathbb{F}$–adaptowalnych procesów càdlàg o wartościach w przestrzeni $L^2$. Przestrzeń tę będziemy rozważać wraz z normą $\|x\|_{S^2} = \|\sup_{t\in I} |x_t|\|_{L^2}$.

Dla dowolnych $x \in S^2(I; L^2)$ oraz multifunkcji $F$, symbolem $F(x)$, oznaczamy wielowartościowy proces $\mathbb{F}$–przewidywalny $(F(t, x_t(\omega)))_{t\in I}$.

**Definicja 4.1** Niech $x \in S^2(I; L^2)$. Wielowartościowy proces stochastyczny $F(x)$ jest $S^2$-całkowo ograniczony, jeżeli istnieje taki rzeczywisty proces $m \in S^2(I; L^2)$, że dla dowolnych $x \in S^2(I; L^2)$ oraz $t \in I$, $H(F(t, x_t), \{0\}) \leq m_t$.

Niech $x \in S^2(I; L^2)$ oraz $Z \in \underline{H}^\infty$. Jeżeli proces $F(x)$ jest $S^2$-całkowo ograniczony, wówczas zbiór selektorów $\mathcal{S}_{S^2}(F(x))$ jest niepusty w $S^2(I; L^2)$. Wynika to z Twierdzenia 2.1.

Dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$, wielowartościowa całka stochastyczna, (Definicja 2.3), $\int_s^t F(\tau, x_\tau)dZ_\tau$ jest zbiorem niepustym. Wynika to z niepustości zbioru selektorów $\mathcal{S}_{S^2}(F(x))$ i ciągłości odwzorowania $\mathcal{J}_Z$, (komentarz pod Definicją 2.4).

**Definicja 4.2** Dla dowolnego jednowymiarowego $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$ z przestrzeni $\underline{H}^\infty$, $Z_0 = 0$, oraz $s, t \in I$, $s < t$, rozważamy następującą inkluzję stochastyczną

$$x_t - x_s \in cl_{L^2}(\int_s^t F(\tau, x_\tau) dZ_\tau) \tag{SI}$$

z warunkiem początkowym $x_0 = \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^n)$.
Proces $x \in S^2(I; L^2)$ jest rozwiązaniem inkluzji (SI), jeżeli $x_0 = \xi$ oraz dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$, zmienna losowa $x_t - x_s$ należy do zbioru

$$cl_{L^2}(\int_s^t F(\tau, x_\tau) dZ_\tau).$$

Zbiór wszystkich rozwiązań inkluzji (SI) oznaczamy jako

$$\mathcal{T}(\xi) = \{x \in S^2(I; L^2) : x \text{ jest rozwiązaniem (SI)}\}.$$

Multifunkcja $F$ spełnia warunek Lipschitza, jeżeli istnieje taka stała $D$, że dla dowolnych $t \in I$ oraz $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$H(F(t, x), F(t, y)) \le D|x - y|.$$

**Twierdzenie 4.3** *Niech $Z$ będzie jednowymiarowym $\mathbb{F}$–semimartyngałem z przestrzeni $\underline{H}^\infty$, $Z_0 = 0$, oraz $x \in S^2(I; L^2)$. $F : I \times \mathbb{R}^n \to cl\ conv(\mathbb{R}^n)$ niech będzie multifunkcją spełniającą warunek Lipschitza, natomiast $F(x)$ niech będzie procesem $S^2$-całkowo ograniczonym. Wtedy dla dowolnego $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^n)$ zbiór $\mathcal{T}(\xi)$ rozwiązań inkluzji (SI) jest zbiorem niepustym.*

**Dowód.** W dowodzie wykorzystamy Twierdzenie Covitza-Nadlera, (Twierdzenie 1.7).

Dzielimy przedział $I$ punktami pośrednimi $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_k = T$. Niech $c_Z^i = (\int_{t_{i-1}}^{t_i} d[N, N]_\tau)^{1/2} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |dA_\tau|$, dla $i = 1, \ldots, k$, gdzie $Z = N + A$ jest rozkładem kanonicznym $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$, rozpatrywanym na przestrzeni $[t_{i-1}, t_i] \times \Omega$. Punkty $t_i$ dobieramy tak, aby

$$Dc_2 \|c_Z^i\|_{L^\infty} < 1.$$

Skonstruujemy najpierw rozwiązanie inkluzji (SI) na przedziale $[0, t_1]$. Dla dowolnych $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^n)$ oraz $x \in S^2([0, t_1]; L^2)$ określamy odwzorowanie $\Gamma$ wzorem

$$\Gamma(x) = \{y : \ y_t = \xi + \int_0^t f_{\tau-} dZ_\tau, \text{ gdzie } f \in \mathcal{S}_{S^2}(F(x)), \text{ dla } (t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega\}.$$

Pokażemy, że $\Gamma : S^2([0,t_1];L^2) \to 2^{S^2([0,t_1];L^2)}$.

Niech $x \in S^2([0,t_1];L^2)$ będzie dowolne. Z $S^2$-całkowej ograniczoności procesu $F(x)$, (Definicja 4.1), oraz Twierdzenia 2.1 wynika, że $\Gamma(x)$ jest zbiorem niepustym.

Z definicji odwzorowania $\Gamma$, dowolny proces $y \in \Gamma(x)$ można przedstawić w postaci $y_t = \xi + \int_0^t f_{\tau-} dZ_\tau$, dla pewnych $f \in \mathcal{S}_{S^2}(F(x))$ na $[0,t_1] \times \Omega$.
Ponieważ $x \in S^2([0,t_1];L^2)$, a $\xi = x_0$, więc $\xi \in S^2([0,t_1];L^2)$.
Z Twierdzenia 1.10 całka $\int f_{\tau-} dZ_\tau$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem, więc także $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem càdlàg. Dostajemy więc, że $y$, jako suma $\mathbb{F}$–adaptowalnych procesów càdlàg o wartościach w przestrzeni $L^2$, jest również $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem càdlàg o wartościach w przestrzeni $L^2$. Zatem $y \in S^2([0,t_1];L^2)$.

Pokażemy teraz, że $\|y\|_{S^2} < \infty$.

$$\|y\|_{S^2} = \|\xi + \int f_{\tau-} dZ_\tau\|_{S^2} \leq \|\xi\|_{S^2} + \|\int f_{\tau-} dZ_\tau\|_{S^2}$$

Ponieważ $\xi \in S^2([0,t_1];L^2)$, więc $\|\xi\|_{S^2} < \infty$.
Rozpatrzmy drugi ze składników. Korzystając z Twierdzenia 1.16 oraz Nierówności Emery'ego, (Twierdzenie 1.17), dostajemy

$$\|\int f_{\tau-} dZ_\tau\|_{S^2} \leq c_2 \|\int f_{\tau-} dZ_\tau\|_{\underline{H}^2_n} \leq c_2 \|f\|_{S^2} \|Z\|_{\underline{H}^\infty} \leq c_2 \|m\|_{S^2} \|Z\|_{\underline{H}^\infty} < \infty.$$

Zauważmy, że $\|Z\|_{\underline{H}^\infty} \leq \|c^1_Z\|_{L^\infty}$ w przypadku, gdy $Z = N + A$ jest rozkładem kanonicznym $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$, rozpatrywanym na przestrzeni $[0,t_1] \times \Omega$. W rezultacie otrzymaliśmy, że

$$\|y\|_{S^2} \leq \|\xi\|_{S^2} + c_2 \|c^1_Z\|_{L^\infty} \|m\|_{S^2} < \infty. \tag{4.1}$$

co oznacza, że $\Gamma : S^2([0,t_1];L^2) \to 2^{S^2([0,t_1];L^2)}$.

Ponieważ zbiór $\Gamma(x)$ nie musi być zbiorem domkniętym w sensie normy $\|\cdot\|_{S^2}$ w przestrzeni $S^2([0,t_1];L^2)$, nie są więc spełnione wszystkie założenia Twierdzenia Covitza-Nadlera.

Rozważmy zbiór $cl_{S^2}(\Gamma(x))$, będący domknięciem w sensie normy $\|\cdot\|_{S^2}$ zbioru $\Gamma(x)$ w przestrzeni $S^2([0,t_1];L^2)$. Zbiór ten jest niepustym, ograniczonym i domkniętym podzbiorem w przestrzeni $S^2([0,t_1];L^2)$.

Pokażemy, że odwzorowanie $x \to cl_{S^2}(\Gamma(x))$ jest kontrakcją wielowartościową w przestrzeni $S^2([0,t_1];L^2)$.

Niech $u$ i $v$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $S^2([0,t_1];L^2)$. Chcemy pokazać, że istnieje stała $K \in [0,1)$ taka, że zachodzi nierówność

$$H_{S^2}(cl_{S^2}(\Gamma(u)), cl_{S^2}(\Gamma(v))) \leq K\|u-v\|_{S^2}.$$

W tym celu dla dowolnego $y \in cl_{S^2}(\Gamma(u))$ będziemy szacować $\mathrm{dist}_{S^2}(y, cl_{S^2}(\Gamma(v)))$. Pokażemy, że dla dowolnego $y \in cl_{S^2}(\Gamma(u))$ istnieje $\bar{y} \in cl_{S^2}(\Gamma(v))$ taki, że

$$\|y-\bar{y}\|_{S^2} \leq K\|u-v\|_{S^2}.$$

Niech $y$ będzie dowolnym elementem zbioru $cl_{S^2}(\Gamma(u))$. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje proces $\tilde{y} \in \Gamma(u)$ taki, że $\|y-\tilde{y}\|_{S^2} < \epsilon$. Z definicji zbioru $\Gamma(u)$ proces ten można przedstawić w postaci $\tilde{y}_t = \xi + \int_0^t f_{\tau-}dZ_\tau$ dla pewnego $f \in \mathcal{S}_{S^2}(F(u))$ na $[0,t_1] \times \Omega$.

Z Twierdzenia Filipowa, (Twierdzenie 1.6), wynika, że istnieje $\bar{f} \in \mathcal{S}_{S^2}(F(v))$ takie, że

$$|f(t,\omega) - \bar{f}(t,\omega)| \leq \mathrm{dist}(f(t,\omega), F(t, v(t,\omega))) + \epsilon, \tag{4.2}$$

dla dowolnego $t \in [0,t_1]$ i prawie wszystkich $\omega \in \Omega$.
Niech $\bar{y}_t = \xi + \int_0^t \bar{f}_{\tau-}dZ_\tau$ dla $t \in [0,t_1]$. Z definicji zbioru $\Gamma(v)$ otrzymujemy, że $\bar{y} \in \Gamma(v)$.

Oszacujemy odległość między $y$ a $\bar{y}$ w przestrzeni $S^2([0,t_1];L^2)$.
Korzystając z zależności (4.1) dostajemy, że

$$\begin{aligned} J = \|y-\bar{y}\|_{S^2} \leq \|y-\tilde{y}\|_{S^2} + \|\tilde{y}-\bar{y}\|_{S^2} &\leq \epsilon + \|\int(f_{\tau-} - \bar{f}_{\tau-})dZ_\tau\|_{S^2} \\ &\leq \epsilon + c_2\|c_Z^1\|_{L^\infty}\|f-\bar{f}\|_{S^2} = \epsilon + c_2\|c_Z^1\|_{L^\infty}\|\sup_{t\in[0,t_1]}|f_t - \bar{f}_t|\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnego $f \in F(u)$,

$$\mathrm{dist}(f(t,\omega), F(t,v(t,\omega))) \leq H(F(t,u_t), F(t,v_t)),$$

dla każdego $t \in [0, t_1]$ i prawie wszystkich $\omega \in \Omega$, więc z warunku (4.2) otrzymujemy

$$J \leq \epsilon + c_2 \|c_Z^1\|_{L^\infty} \| \sup_{t\in[0,t_1]} (H(F(t,u_t), F(t,v_t)) + \epsilon)\|_{L^2}.$$

Korzystając z warunku Lipschitza dla multifunkcji $F$ dostajemy, że

$$\begin{aligned} J &\leq \epsilon + c_2 \|c_Z^1\|_{L^\infty} \| \sup_{t\in[0,t_1]} (D|u_t - v_t| + \epsilon)\|_{L^2} \\ &\leq \epsilon + Dc_2 \|c_Z^1\|_{L^\infty} \| \sup_{t\in[0,t_1]} |u_t - v_t|\|_{L^2} + c_2 \|c_Z^1\|_{L^\infty}\epsilon \\ &\leq Dc_2 \|c_Z^1\|_{L^\infty} \|u - v\|_{S^2} + \epsilon_1, \end{aligned}$$

gdzie $\epsilon_1 = (c_2\|c_Z^1\|_{L^\infty} + 1)\epsilon$. Otrzymaliśmy więc, że istnieje stała $K = Dc_2\|c_Z^1\|_{L^\infty}$, która nie zależy od wyboru procesu $y$ ze zbioru $cl_{S^2}(\Gamma(u))$. Zatem

$$\|y_t - \bar{y}_t\|_{S^2} \leq K\|u - v\|_{S^2} + \epsilon_1.$$

Ponieważ $\epsilon > 0$ był dowolny, więc odległość dowolnego elementu $y \in cl_{S^2}(\Gamma(u))$ od zbioru $cl_{S^2}(\Gamma(v))$ jest określona zależnością

$$\mathrm{dist}_{S^2}(y, cl_{S^2}(\Gamma(v))) \leq K\|u - v\|_{S^2}.$$

W rezultacie dostajemy, że

$$H_{S^2}(cl_{S^2}(\Gamma(u)), cl_{S^2}(\Gamma(v))) \leq K\|u - v\|_{S^2}.$$

Otrzymana stała $K = Dc_2\|c_Z^1\|_{L^\infty}$ jest liczbą nieujemną mniejszą od 1, co oznacza, że odwzorowanie $cl_{S^2}(\Gamma)$ jest kontrakcją wielowartościową w przestrzeni $S^2([0,t_1]; L^2)$.

Z Twierdzenia Covitza-Nadlera wnioskujemy, że istnieje proces $y \in S^2([0,t_1]; L^2)$ taki, że $y \in cl_{S^2}(\Gamma(y))$. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ można wybrać $y^\epsilon \in \Gamma(y)$ taki, że

$$\|y - y^\epsilon\|_{S^2} < \epsilon.$$

Z definicji zbioru $\Gamma(y)$ istnieje $f^\epsilon \in \mathcal{S}_{S^2}(F(y))$ takie, że $y_t^\epsilon = \xi + \int_0^t f_{\tau-}^\epsilon dZ_\tau$ dla dowolnego $t \in [0, t_1]$. Mamy więc

$$\| \sup_{t\in[0,t_1]} |y_t - (\xi + \int_0^t f_{\tau-}^\epsilon dZ_\tau)|\|_{L^2} < \epsilon.$$

Stąd dla dowolnego $t \in [0, t_1]$ otrzymujemy

$$\|y_t - (\xi + \int_0^t f^{\epsilon}_{\tau-} dZ_\tau)\|_{L^2} < \epsilon. \tag{4.3}$$

Aby proces $y$ był rozwiązaniem inkluzji (SI) na przedziale $[0, t_1]$ musimy pokazać, że $y_t - y_s \in cl_{L^2}(\int_s^t F(\tau, y_\tau) dZ_\tau)$, dla dowolnych $s, t \in [0, t_1]$, $s < t$.

Z zależności (4.3) dostaniemy, że dla dowolnych $s, t \in [0, t_1]$, $s < t$

$$\|y_t - y_s - (\xi + \int_0^t f^{\epsilon}_{\tau-} dZ_\tau - \xi - \int_0^s f^{\epsilon}_{\tau-} dZ_\tau)\|_{L^2} = \|y_t - y_s - \int_s^t f^{\epsilon}_{\tau-} dZ_\tau\|_{L^2} < \epsilon.$$

Wobec dowolności $\epsilon > 0$ mamy

$$y_t - y_s \in cl_{L^2}(\int_s^t F(\tau, y_\tau) dZ_\tau), \text{ dla } s, t \in [0, t_1], \quad s < t.$$

Niech $i = 2$. Zmieniając przedział $[0, t_1]$ na $[t_1, t_2]$ oraz punkt początkowy konstruowanego rozwiązania $\xi$ na $y_{t_1}$, w podobny sposób otrzymamy proces $y \in S^2([t_1, t_2]; L^2)$. Dla tego procesu przy dowolnym $\epsilon > 0$ istnieje $f^\epsilon \in \mathcal{S}_{S^2}(F(y))$ takie, że dla dowolnego $t \in [t_1, t_2]$, zachodzi zależność

$$\|y_t - (y_{t_1} + \int_{t_1}^t f^{\epsilon}_{\tau-} dZ_\tau)\|_{L^2} < \epsilon.$$

Nierówność ta oznacza, że dla dowolnych $s, t \in [t_1, t_2]$, $s < t$, $y$ jest elementem domknięcia w sensie normy $L^2$ zbioru

$$\int_s^t F(\tau, y_\tau) dZ_\tau,$$

czyli $y$ jest rozwiązaniem inkluzji (SI) na przedziale $[t_1, t_2]$.

Powtarzając konstrukcję dla $i = 2, 3, \dots, k-1$, i przyjmując punkt początkowy równy $y_{t_i}$, otrzymamy rozwiązania inkluzji (SI) na przedziałach $[t_i, t_{i+1}]$.

Poszukiwanym rozwiązaniem inkluzji (SI), dla $s, t \in I$, $s < t$, będzie złożenie rozwiązań na przedziałach $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. ∎

**Twierdzenie 4.4** *Niech $Z$ będzie jednowymiarowym $\mathbb{F}$–semimartyngałem z przestrzeni $\underline{H}^\infty$, $Z_0 = 0$ oraz $x \in S^2(I; L^2)$. $F : I \times \mathbb{R}^n \to cl\ conv(\mathbb{R}^n)$ niech będzie multifunkcją spełniającą warunek Lipschitza, natomiast $F(x)$ niech będzie procesem $S^2$-całkowo ograniczonym. Wtedy dla dowolnego $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^n)$ zbiór $\mathcal{T}(\xi)$ rozwiązań inkluzji (SI) jest zbiorem ograniczonym w przestrzeni $L^2(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$.*

**Dowód.** Dla dowolnych $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^n)$, $x \in \mathcal{T}(\xi)$ oraz $t \in I$ z warunku

$$x_t \in \xi + cl_{L^2}(\int_0^t F(\tau, x_\tau) dZ_\tau)$$

wynika, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $f^t \in F(x)$ takie, że spełniona jest nierówność

$$\|x_t - \tilde{x}_t\|_{L^2} < \epsilon,$$

gdzie $\tilde{x}$ jest postaci $\tilde{x}_t = \xi + \int_0^t f^t_\tau dZ_\tau$.
Zauważmy, że dla dowolnego $\tilde{x}$ z zależności (4.1) dostajemy, że

$$\|\tilde{x}\|_{S^2} \leq \|\xi\|_{S^2} + c_2 \|c_Z\|_{L^\infty} \|m\|_{S^2} = K < \infty,$$

gdzie $c_Z = (\int_0^T d[N, N]_\tau)^{1/2} + \int_0^T |dA_\tau|$, dla $i = 1, \ldots, k$ oraz $Z = N + A$ jest rozkładem kanonicznym $\mathbb{F}$–semimartyngału $Z$, rozpatrywanym na przestrzeni $[0, T] \times \Omega$.
Ponieważ dla dowolnego $t \in I$

$$\|\tilde{x}_t\|_{L^2} \leq \| \sup_{t \in I} |\tilde{x}_t| \|_{L^2} = \|\tilde{x}\|_{S^2},$$

więc w rezultacie otrzymujemy, że $\|\tilde{x}_t\|_{L^2} \leq K < \infty$.

Ostatecznie dostaniemy, że dla dowolnych $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^n)$, $x \in \mathcal{T}(\xi)$ oraz $t \in I$ zachodzi zależność

$$\|x_t\|_{L^2} \leq \|x_t - \tilde{x}_t\|_{L^2} + \|\tilde{x}_t\|_{L^2} < \epsilon + K < \infty.$$

Ponieważ

$$\|x\|_{L^2(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)} = (E \int_0^T |x_t|^2 dt)^{1/2} = (\int_0^T \|x_t\|^2_{L^2} dt)^{1/2} < T(\epsilon + K) < \infty,$$

gdzie stałe $T$ oraz $K$ nie zależą od wyboru rozwiązania $x$, więc zbiór $\mathcal{T}(\xi)$ rozwiązań inkluzji (SI) jest ograniczony w przestrzeni $L^2(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. ∎

W drugiej części rozdziału przedstawione zostanie twierdzenie selekcyjne będące stochastycznym odpowiednikiem Lematu o Reprezentacji Całkowej, ([3] Lemat 2.1.1), dla wielowartościowej całki stochastycznej typu Stratonowicza. Twierdzenie to stanowi pierwszy krok w kierunku badań własności zbioru rozwiązań inkluzji stochastycznej typu Stratonowicza. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystano ideę z pracy [30] oraz definicje i własności z rozdziałów drugiego i trzeciego.

Niech $I$ będzie, podobnie jak w rozdziale trzecim, przedziałem $[0,1]$.

W następnym twierdzeniu rozważać będziemy procesy, których definicje znajdują się w rozdziałach drugim oraz trzecim.

**Twierdzenie 4.5** *Niech $Z$ będzie $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem należącym do przestrzeni $\underline{H}^2$, $Z_0 = 0$, $G$ niech będzie całkowo ograniczonym przez proces $m$ $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalnym procesem wielowartościowym, lewostronnie ciągłym w punkcie $t = 1$, o wartościach w przestrzeni $comp\,conv(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli dla całkowo dekomponowalnego procesu RV–càdlàg $x$ zachodzi zależność*

$$x_b - x_a \in \int_{(a,b]} G \circ dZ,$$

*dla dowolnych $0 \le a < b \le 1$, to istnieje para procesów stochastycznych $(g,\tilde{h})$ taka, że $g \in cl_{L^2_Z}\mathcal{S}_Z(G_-)$, $\tilde{h} \in cl_{L^2_{\tilde{Z}}}\mathcal{S}_{\tilde{Z}}(\tilde{G}_-)$ i dla dowolnego $0 < t \le 1$ spełniona jest równość*

$$x_t = x_0 + 1/2\int_{(0,t]} g_\tau dZ_\tau - 1/2\int_{[1-t,1)} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau \qquad \text{prawie na pewno.}$$

**Dowód.** Ponieważ dla dowolnych $0 \le s < t \le 1$, $x_t - x_s \in \int_{(s,t]} G \circ dZ$, więc istnieją RV–càdlàg i $(\mathbb{F},\mathbb{H})$–odwracalne selektory $g^{s,t} \in G$ takie, że

$$x_t - x_s = \int_{(s,t]} g^{s,t} \circ dZ.$$

Z Lematu 3.5(ii) oraz całkowej dekomponowalności procesu $x$ otrzymujemy, że istnieją procesy RV–càdlàg $u, v$ takie, że $u_0 \in \mathcal{F}_0$, $v_1 \in \mathcal{H}_0$, $x = u + v$ oraz dla dowolnych $0 \le s < t \le 1$

$$u_t - u_s = 1/2\int_{(s,t]} g^{s,t} d^- Z$$

$$v_t - v_s = 1/2\int_{(s,t]} g^{s,t} d^+ Z.$$

Korzystając z Lematu 3.7 oraz zależności (3.2) z dowodu Twierdzenia 3.19, dla dowolnych $0 \leq s < t \leq 1$

$$u_t - u_s = 1/2 \int_{(s,t]} g^{s,t}_{\tau-} dZ_\tau,$$
$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_s = 1/2 \int_{(s,t]} \tilde{g}^{1-s,1-t}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau.$$

Z definicji wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô, (Definicja 2.3), dostajemy $g^{s,t}_{-} \in \mathcal{S}_Z(G_-)$, $\tilde{g}^{1-s,1-t}_{-} \in \mathcal{S}_{\tilde{Z}}(\tilde{G}_-)$ oraz

$$\int_{(s,t]} g^{s,t}_{\tau-} dZ_\tau \in \int_{(s,t]} G_{\tau-} dZ_\tau,$$
$$\int_{(s,t]} \tilde{g}^{1-s,1-t}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau \in \int_{(s,t]} \tilde{G}_{\tau-} d\tilde{Z}_\tau.$$

Z założenia, że $Z$ jest $(\mathbb{F}, \mathbb{H})$–odwracalnym semimartyngałem z przestrzeni $\underline{H}^2$ wynika, że $Z$ jest $\mathbb{F}$–semimartyngałem z przestrzeni $\underline{H}^2$ oraz $\tilde{Z}$ jest $\mathbb{H}$–semimartyngałem z przestrzeni $\underline{H}^2$.

Z określenia procesów $u$ i $v$ wnioskujemy, że $u$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem RV–càdlàg oraz $u_0 \in \mathcal{F}_0$, natomiast $\tilde{v}$ jest $\mathbb{H}$–adaptowalnym procesem RV–càdlàg oraz $\tilde{v}_0 = v_1 \in \mathcal{H}_0$.

Ponieważ $G_-$ jest $\mathbb{F}$–adaptowalnym procesem RV–càglàd, jest więc $\mathbb{F}$–przewidywalny, podobnie $\tilde{G}_-$ jako $\mathbb{H}$–adaptowalny proces RV–càglàd jest $\mathbb{H}$–przewidywalnym procesem.

Mamy więc spełnione wszystkie założenia Twierdzenia 1.9 dla procesów $u$ i $\tilde{v}$ określonych, odpowiednio, na przestrzeniach $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ oraz $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{H}, P)$.

Korzystając z tezy tego twierdzenia istnieją procesy $g, \tilde{h}$ takie, że $g \in cl_{L^2_Z} \mathcal{S}_Z(G_-)$, $\tilde{h} \in cl_{L^2_{\tilde{Z}}} \mathcal{S}_{\tilde{Z}}(\tilde{G}_-)$ oraz dla dowolnych $t \in (0,1]$

$$u_t = u_0 + 1/2 \int_{(0,t]} g_\tau dZ_\tau \qquad \text{prawie na pewno,}$$
$$\tilde{v}_t = \tilde{v}_0 + 1/2 \int_{(0,t]} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau \qquad \text{prawie na pewno.}$$

Obliczając granicę lewostronną z $\tilde{v}_t$, mamy dla dowolnych $t \in [0,1]$

$$\tilde{v}_{t-} = \tilde{v}_0 + 1/2 \int_{(0,t)} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau \qquad \text{prawie na pewno.}$$

Ponadto

$$v_t = \tilde{v}_{(1-t)-} = \tilde{v}_0 + 1/2 \int_{(0,1-t)} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau \qquad \text{prawie na pewno.}$$

Ponieważ $x = u + v$, zatem dla dowolnych $t \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} x_t &= u_t + v_t = u_t + v_t - v_0 + v_0 = u_t + \tilde{v}_{(1-t)-} - \tilde{v}_{1-} + v_0 \\ &= u_0 + 1/2 \int_{(0,t]} g_\tau dZ_\tau + \tilde{v}_0 + 1/2 \int_{(0,1-t)} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau - \tilde{v}_0 - 1/2 \int_{(0,1)} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau + v_0 \\ &= u_0 + v_0 + 1/2 \int_{(0,t]} g_\tau dZ_\tau - 1/2 \int_{[1-t,1)} \tilde{h}_\tau d\tilde{Z}_\tau, \end{aligned}$$

co należało pokazać. ■

Udowodnione twierdzenie pozwala uzyskać równoważność dwóch definicji rozwiązania inkluzji stochastycznej typu Stratonowicza. W przypadku równań stochastycznych typu Stratonowicza takiego problemu nie ma, gdyż definiuje się rozwiązania w następujący sposób:
Proces $x$ jest rozwiązaniem równania

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_\tau) \circ dZ_\tau, \quad t \in I,$$

jeżeli dla dowolnych $t \in I$ powyższa równość zachodzi prawie na pewno.

W przypadku wielowartościowym mamy dwie możliwości różnych definicji rozwiązania.

Niech $G$ będzie multifunkcją i niech dana będzie inkluzja stochastyczna

$$x_t \in x_0 + \int_0^t G(x_\tau) \circ dZ_\tau, \quad t \in I. \tag{SSI}$$

**Definicja 4.6** Proces $x$ jest rozwiązaniem inkluzji (SSI), jeżeli dla dowolnych $s, t \in I$, $s < t$, zmienna losowa $x_t - x_s$ jest elementem zbioru zmiennych losowych określonych wielowartościową całką stochastyczną $\int_s^t G(x_\tau) \circ dZ_\tau$, tzn.

$$x_t - x_s \in \int_s^t G(x_\tau) \circ dZ_\tau.$$

**Definicja 4.7** Proces $x$ jest rozwiązaniem inkluzji (SSI), jeżeli istnieje taki $Z-$ całkowalny w sensie Stratonowicza proces $g$, że dla dowolnego $t \in I$, $g_t \in G(x_t)$ oraz

$$x_t = x_0 + \int_0^t g_\tau \circ dZ_\tau.$$

Definicja 4.6 jest podobna do definicji rozwiązania przyjętej dla równania stochastycznego. W badaniach inkluzji stochastycznych typu Itô używa się obu definicji. Pierwsza z nich była stosowana przez M. Kisielewicza w [22], druga np. przez T.N. Kraveca w [26], N.U. Ahmeda w [1], J. Motyla w [29]. E.P. Avgerinos i N.S. Papageorgiou w pracy [6] badali inkluzję losową, której rozwiązania określono przy pomocy kombinacji obu powyższych definicji. Definicja 4.6 jest wygodniejsza w przypadku badań zbioru rozwiązań prowadzonych przy pomocy własności multifunkcji $G$ zależnych od metryki Hausdorffa. Definicja 4.7 jest użyteczniejsza w przypadku badań problemów bazujących na metodach selekcyjnych.

Z powyższych definicji wynika, że jeżeli $x$ jest rozwiązaniem inkluzji (SSI) w sensie Definicji 4.7, to jest także rozwiązaniem w sensie Definicji 4.6. W teorii deterministycznych inkluzji różniczkowych implikacja odwrotna jest znana jako Lemat o Reprezentacji Całkowej, ([3] Lemat 2.1.1), i jest konsekwencją własności selekcyjnych całek wielowartościowych. Dla całki Aumanna własność taką udowodnił A. Fryszkowski w pracy [15]. M. Kisielewicz w pracy [23] rozpatrywał podobny problem dla wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô względem procesu Wienera i Poissona, natomiast J. Motyl w [30] wykazał taką własność dla wielowartościowej całki stochastycznej typu Itô względem semimartygału.

Uzyskany w Twierdzeniu 4.5 rezultat pozwala na badanie własności inkluzji stochastycznych typu Stratonowicza. Nie trzeba przy tym ograniczać się do jednej metody badawczej, np. tylko metod selekcyjnych, czy też tylko technik związanych z odległością Hausdorffa. Uzyskane twierdzenie pozwala na korzystanie z obu metod.

# Bibliografia


[1] Ahmed N.U., *Nonlinear stochastic differential inclusions on Banach spaces*, Stoch. Anal. Appl., 12, 1-12, 1994.

[2] Artstein Z., *On the calculus of closed set-valued functions*, Indiana Univ. Math. J., 24, 433–441, 1974/75.

[3] Aubin J.-P., Cellina A., Differential Inclusions, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[4] Aubin J.-P., Frankowska H., Set-valued analysis, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 1990.

[5] Aumann R.J., *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl., 12, 1-12, 1965.

[6] Avgerinos E.P., Papageorgiou N.S., *Random nonlinear evolution inclusions in reflexive Banach spaces*, Proc. of the AMS, 104, 293-299, 1988.

[7] Boscan G., *On Wiener stochastic integral of a multifunction*, Seminarul de Teoria Probabilitatilor si Applicatii, Univ. Timisoara, 1987.

[8] Castaing C., *Sur les multi-applications measurables*, Rev. Fr. Inf. Recher. Oper. 1, 91-126, 1967.

[9] Chung K.L., Williams R.J., Introduction to stochastic integration, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 1990.

[10] Datko R., *Measurability properties of set-valued mappings in a Banach space*, SIAM J. Control, 8, 226–238, 1970.

[11] Debreu G., *Integration of correspondences*, 1967, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1 pp. 351–372 Univ. California Press, Berkeley, Calif.

[12] De Blasi F.S., Lasota A., *Daniell's method in the theory of the Aumann-Hukuhara integral of set-valued functions*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 45, 252–256, 1968.

[13] Errami M., Russo F., Vallois P., *Itô's formula for $C^{1,\lambda}$-functions of a càdlàg process and related calculus*, Probab. Theory Relat. Fields 122, 191-221, 2002.

[14] Fryszkowski A., *Carateódory type selections of Aumann integrals*, Modern optimal control, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 119, Dekker, New York, 105–113, 1989.

[15] Fryszkowski A., *Continuous selections of Aumann integrals*, J. Math. Anal. Appl., 145, no.2, 431-446, 1990.

[16] Gelman B.D., Gliklikh J.S., *Set-valued Itô integral*, Priblizennye Metody Issledovani Differentialnych Uravneni i ikh Prilozeni, Mezbuzovskii Sbornik, Kuibyshevskii Universitaet, 1984 (w j. rosyjskim).

[17] Góralczyk A., Motyl J., *Set-valued Stratonovich integrals*, Disc. Math. Probab. Stat. 26, 63-81, 2006.

[18] Hiai F. and Umegaki H., *Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions*, J. Multivar. Anal. 7, 149-182, 1977.

[19] Itô K., *Stochastic integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 519–524, 1944.

[20] Itô K., *On a stochastic integral equation*, Proc. Japan Acad. 22(1-4), 32–35, 1946.

[21] Jacod J., Protter P., *Time reversal on Lévy Processes*, Ann. Probab. 16, No. 2, 620-641, 1988.

[22] Kisielewicz M., *Properties of solution set of stochastic inclusions*, J. Appl. Math. Stoch. Anal., 6, 217-236, 1993.

[23] Kisielewicz M., *Set-valued Stochastic Integrals and Stochastic Inclusions*, Stoch. Anal. Appl., 15(5), 783-800, 1997.

[24] Kisielewicz M., Differential Inclusions and Optimal Control, Kluwer Acad. Publ. and Polish Sci. Publ., Warszawa - Dordrecht - Boston - London, 1991.

[25] Kisielewicz M., Michta M., Motyl M., *Set Valued Approach to Stochastic Control. Part II (Viability and Semimartingale Issues)*, Dynamic Syst. Appl. 12, 433-466, 2003.

[26] Kravec T.N., *To the question on stochastic differential inclusions*, Teoria Slucajnich. Procesov (Theory of Random Processes), 15, 54-59, 1987 (w j. rosyjskim).

[27] Michta M., *Stochastic inclusions with multivalued integrators*, Stoch. Anal. Appl. 20(4), 847-862, 2002.

[28] Michta M., Motyl J., *Set valued Stratonovich integral and Stratonovich type stochastic inclusion*, Dynamic Syst. Appl. 16, No. 1, 141-154, 2007.

[29] Motyl J., *On the solution of a stochastic differential inclusion*, J. Math. Anal. Appl. 192, no. 1, 117-132, 1995.

[30] Motyl J., *Note on strong solutions of a stochastic inclusion*, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 8(3), 291-297, 1995.

[31] Motyl J., Syga J., *Properties of set-valued stochastic integrals*, Disc. Math. Probab. Stat. 26, 83-103, 2006.

[32] Motyl J., Syga J., *Selection property of Stratonovich set-valued integral*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, (2009) (w druku).

[33] Protter P., Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, 2nd Edition, Version 2.1, Berlin - Heideberg - New York, 2005.

[34] Russo F., Vallois P., *Forward, backward and symmetric stochastic integration*, Probab. Theory Relat. Fields 97, 403-421, 1993.

[35] Russo F., Vallois P., *The generalized covariation process and Ito formula*, Stoch. Proc. Appl. 59, 81-104, 1995.

[36] Stratonovich R.L., *A new form of representation of stochastic integrals and equations*, Vestnik Moscov. Univ. Ser. I. Math. Meh., 1, 3-12, 1964 (w j. rosyjskim).